УНИВЕРЗИТЕТ “МАЈКА ТЕРЕЗА” СКОПЈЕ

ФАКУЛТЕТ ЗА ИНФОРМАТИЧКИ НАУКИ

СТУДИСКА ПРОГРАМА: МАТЕМАТИКЧКО- ИНФОРМАТИЧКО ОБРАЗОВАНИЕ

Магистерски Труд

Тема: ПРИМЕНА НА АРИТМЕТИЧКАТА И ГЕОМЕТРИСКАТА ПРОГРЕСИЈА ВО ЕКОНОМИЈАТА СО КОРИСТЕЊЕ НА АПЛИКАТИВНИОТ СОФТВЕР *Wolfram Mathematica*

Ментор: **Доц. д-р Теута Јусуфи- Зенку**

Студент: **Сезер Караџа**

Скопје, 2021

Заблагодарување

Во оваа пригода сакам да се заблагодарам на мојата ценета животна сопатничка **Веибе Караџа** и моите близнаци **Шуара и Хашим Караџа** кои цело време беа моите најголеми подржувачи, во целта да достигнам до ова ниво. Не можам да ја заборавам и мојата менторка **Доц. д-р Теута Јусуфи- Зенку** која цело време ме подржуваше за да успеам во овој пат. И на крајот посебна благодарност до мојот ценет пријател, професорот **Проф. д-р Беким Фетаји**, кој упорно ме подржуваше во целта да успеам. Исто така една голема благодарност до сите мои професори од нашиот универзитет “Мајка Тереза” во Скопје, кои дадоа голем допринос во мојата математичко-информатичка надградба…

Апстракт:

Во овој труд ќе ве запознаеме со два специјални видови на низи, и тоа аритметички и геометриски низи, кои што вообичаено се нарекуваат соодветно аритметичка и геометриска прогресија. Разликата меѓу два последователни членови на една прогресија ако е константен број, таа прогресија се нарекува **“аритметичка прогресија”.** Доколку количникот меѓу два последователни членови е еден ист број, таа прогресија се нарекува **”геометриска прогресија”.** При решавање на аритметичките и геометриските прогресии ќе се користи колекцијата на алгоритми на апликативниот софтвер *Wolfram Mathematica*. Исто така добиените решенија ќе се споредат со решенијата добиени преку апликативниот софтвер и ќе се извлечат заклучоци.

Клучни зборови: аритметичка прогреција, геометриска прогресија, *Wolfram* Mathematica.

Abstract:

In this scientific work, we will introduce you to two special types of sequences, arithmetic and geometric sequences, which are usually called arithmetic and geometric progression, respectively. The difference between two consecutive terms of a progression if it is a constant number, that progression is called "arithmetic progression". If the quotient between two consecutive terms is the same number, that progression is called "geometric progression." The Wolfram Mathematica application software algorithm will be used to solve arithmetic and geometric progressions. Also, the obtained solutions will be compared with the solutions obtained through the application software and conclusions will be drawn.

Keywords: arithmetic progression, geometric progression, *Wolfram Mathematica*.

Содржина

Табела со слики

1. Вовед

Во овој труд ќе ве запознаеме со два специјални видови на низи, и тоа аритметички и геометриски низи, и тие вообичаено се нарекуваат соодветно аритметичка и геометриска прогресија. Разликата меѓу два последователни членови на една прогресија ако е константен број, таа прогресија се нарекува “аритметичка прогресија”. Доколку количникот меѓу два последователни членови е еден ист број, таа прогресија се нарекува ”геометриска прогресија”. Аритметичките и геометриските прогресии се две прогресии кои ги објаснуваат како поимите последователно се следат едни со други.

Значи, во горната дискусија, е јасно дека постои голема разлика помеѓу двете прогресии. Исто така, аритметичка прогресија може да се користи за да се пресмета заштедата, цената, крајниот прираст, итн. Од друга страна, практичната примена на геометриската прогресија е да се најде зголемувањето на растот на населението, интересот итн..

Главниот дел од темата ќе биде примена на софтверот *Wolfram Mathematica* во формулирање и толкување на проблеми и решенија.

Аритметичките и геометриските прогресии имаат голема примена во економијата.

Истражувајќи во сферата на аритметичките и геометриските прогресии во економијата со примена на апликативниот софтвер *Wolfram Mathematica*, почувствував дека има многу малку податоци за истите. Генерално во врска со аритметичките и геометриските прогресии не постојат алгоритми, сето тоа е обопштено во врска со низи од реални броеви, па тоа беше и главна причина зошто се одлучив да работам на оваа тема која ќе ги содржи задачите од областа на аритметичката и геометриската прогресија, со примена на апликативниот софтвер *Wolfram Mathematica*. Како добар познавач на областа на економијата, почуствував дека има потреба од еден ваков труд.

Во ова истражување се применети нови алгоритми за пресметување на општиот член и на аритметичката и геометриската прогресија и истите се користени за задачи од сферата на економијата, меѓутоа истите можат да се применат во било која аритметичката и геометриската прогресија. Исто така се составени нови алгоритми за пресметување на збирот на n членови од аритметичката и геометриската прогресија кои ќе бидат презентирани во ова истражување преку апликативниот софтвер. Составени се и алгоритми за формирање на системи на аритметички и геометриски прогресии како и нивно решавање преку скратен код, за кои мислам ќе бидат од голема корист за идните математичари и економисти. Исто така е составен алгоритам за определување на интерполирани (вметнати) членови од аритметичката и геометриската прогресија, алгоритам од апликативниот софтвер *Wolfram Mathematica* за определување на *n*-тиот член на аритметичката прогресија кога е дадена сумата S_n, првиот член a_1 и разликата d, како и алгоритам за определување на *n*-тиот член на геометриската прогресија кога е дадена сумата S_n, првиот член a_1 и количникот q.

Поважна карактеристика на компјутерот отколку што може да се користи како ефикасна компјутерска алатка е тоа што може да донесе апстрактни математички концепти на екранот и да конкретизира. Апликативниот софтвер *Wolfram Mathematica* служи токму за оваа работа. Така, оваа нова технологија не само што го олесни пресметувањето и визуелизирањето на истото, туку исто така ја смени природата на важните проблеми во математиката и методите на истражување на математичарите. Откако аналитички ќе се пресмета една задача истата преку апликативниот софтвер *Wolfram Mathematica* може да се реши и потврди решението. Со што се штеди време и многу полесно и попрецизно се доаѓа до решение. Во овој труд е применето истото, откако аналитички се пресметувани задачите од аритметичка и геометриска прогресија, за истите се применети алгоритми за решавање, преку апликативниот софтвер *Wolfram Mathematica* со што се споредени и потврдени решенијата добиени по аналитички пат.

Во наставата се почесто треба да се користи оваа технологија, паралелно со аналитичката настава, со цел да се подигне вниманието на учениците и студентите.

Самиот компјутер не може да стори ништо, неговата сила и потенцијал за учење и предавање математика зависи од нас.

2. Методологија на истражување и Примена на апликативниот софтвер Wolfram Mathematica во економијата

Во секојдневниот живот, како и во многу научни области, често пати има потреба да се најде оптимално решение за проблем, каде што се исполнети одредени услови. Со оглед на тоа дека времето за решавање на аритметичките и геометриските прогресии во економијата е долго, примената на апликативниот софтвер *Wolfram Mathematica* во голема мера го олеснува патот до конечното решение што го бараме. Исто така точноста на решенијата може да се спореди со помош на апликативниот софтвер.

2.1. Методологија на истражување

Истражувачката методологија на овој магистерски труд вклучува анализа на стандардни и општи проблеми од областа на аритметичката и геометриската прогресија со примена во економијата со користење на апликативниот софтвер. Истражувањето вклучува нови алгоритми за пресметување на општиот член и на аритметичката и геометриската прогресија за задачи од сферата на економијата. Исто така се составени нови алгоритми за пресметување на збирот на n членови од аритметичката и геометриската прогресија.

Истражувањето исто така вклучува применето истражување кое се фокусира на практичнато моделирање на алгоритам за интерполирање (вметнување) на членови помеѓу два члена од геометриската прогресија и нивно апликативно решение преку софтверската апликација *Wolfram Mathematica*.

Прашањата за истражување вклучуваат:

- Кои се најдобрите начини да се формулира модел што решава практични проблеми од аритметичката и геометриската прогресија?
- Кои се приодите за градење на најдобриот модел?
- Како се имплементира изградениот модел во пракса преку софтверската апликација *Wolfram Mathematica*?

2.2. Wolfram Mathematica

Wolfram Research (wolfram.com) е страница на компанијата Wolfram Research, основана од Stephen Wolfram. Оваа компанија, која развива математички софтвер, кој е добро познат во светот на математиката, ги нуди овие компјутерски и веб-технологии на услуга на науката. Приказната за Stephen Wolfram и компанијата е всушност доста долга. Накратко кажано; Stephen Wolfram, теоретски физичар, работеше на симболички манипулатор [алгебарски компјутерски софтвер] програми за надминување на тешки математички пресметки на ова поле и стигна до истражувања по математика и волфрам години подоцна.

Софтверот *Wolfram Mathematica*, чија прва верзија беше објавена во 1988 година, денес има голем придонес во многу области на науката.

Слика 1.1.Лого за WolfraMathematica [24]

Целта на примената на математичкиот софтвер *Wolfram Mathematica* во образованието било да помогне во образованието во средните училишта и во универзитетите во САД. Пресметките и графиците на *Wolfram Mathematica* се широко користени во физиката и инженерството. Таа нуди поддршка за податоци, графици и пресметки во астрономијата, геологијата, финансиите, биомедицината, метеорологијата и многу други области. Може да се направи моделирање со 2Д и 3Д.

Веб-страницата *Wolfram.com* е исто така математичка библиотека. Делот *Mathworld* содржи дефиниции, теореми и докази во многу полиња како што се алгебра, применета математика, анализа, теорија на броеви, веројатност и статистика, топологија, графикони, функции. Таа е една од најголемите архиви по математика во светот. Верувам дека ќе уживате да ја посетите оваа страница, која моментално владее со светот на математиката.

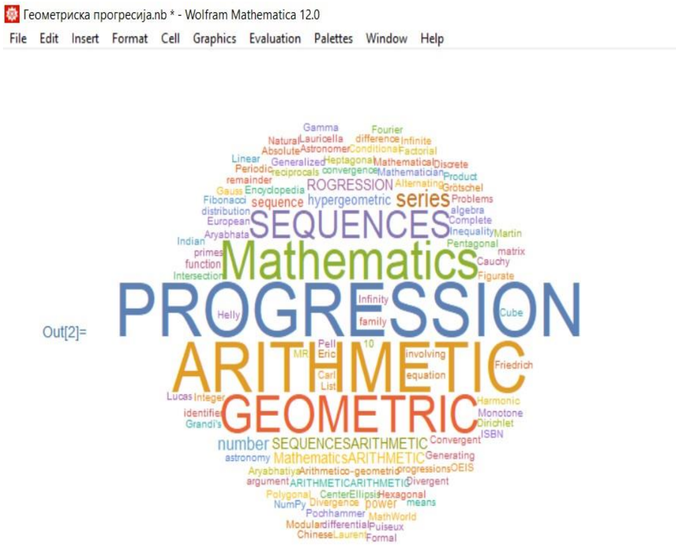
2.3. Stephen Wolfram

Stephen Wolfram е основач и најголем партнер на ***Wolfram Research***. Тој има две печатени книги и бројни статии. Креаторот на програмата ***Mathematica***. Оваа програма досега има продадено повеќе од 1 милион примероци.

Stephen Wolfram е роден во Лондон во 1959 година. Неговиот татко бил бизнисмен, а мајка и била професорка по филозофија која предавала на Оксфорд.

Студиите за теоретска физика барале многу тешки математички апликации. Затоа Волфрам напредувал и во областа на компјутерот и станал зависник од компјутер. Тој темелно ја проучувал секоја напредна програма по математика што можел да ја најде. Тој станал експерт особено во областа на симболички манипулатори. Програмите за симболички манипулатори се програми што можат да надминат $2+2=4$ и да работат со симболи, на пример, $x^2+2x+1=(x+1)(x+1)$.

Слика 1.2. Облак на зборови од Wolfram Mathematica



Пред да биде објавена *Mathematica* како програма, тој ја напишал и ја објавил книгата Mathematica, во која се опишуваат употребата и логиката на програмата. Книгата го направил второто издание три месеци по првите 10.000 изданија.

Едно од местата каде што најмногу се користи Mathematica е областа на образованието. Благодарение на Mathematica, тешко разбирливите интеграли, изводи и слични концепти полесно почнале да се разбираат. Најнапред благодарение на примената на *Mathematica* во американските универзитети, предавањата станале многу интересни за студентите, па потоа истата почнала да се применува и во средните училишта. Денес не постои земја во светот каде не се применува ***"Wolfram Mathematica".***

3. БРОЈНИ НИЗИ И РЕДОВИ

3.1. БРОЈНИ НИЗИ

3.1.1. Поим за низи. Монотони низи. Ограничени низи

Дефиниција 3.1.1.1. Секоја функција $a: n \mapsto a_n$ од множеството природни броеви во множествто реални броеви се нарекува *низа од реални броеви или реална низа*, која се означува со $\{a_n\}$.

Бројот a_1 е прв член на низата, a_2 е втор член на низата, ..., a_n е n-ти член на низата или општ член на низата $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$.

Пример 3.1.1.1. а) Низата зададена со $a_n = 2n$ е $2, 4, 6, \dots, 2n, \dots$.

б) Ако $a_n = \frac{1}{2n}$ тогаш низата е $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \dots, \frac{1}{2n}, \dots$.

в) Ако $c \in R$ и низата е зададена со $a_n = c$, тогаш сите членови се еднакви на c и се нарекува *константна низа*.

Понекогаш општиот член на низата не е дадено експлицитно, туку дадена е врската меѓу a_n и некои претходни членови. Ваквото задавање на низата се нарекува задавање со *рекурентна формула*. Исто така треба да се познати и првите неколку члена на низата [2].

Дефиниција 3.1.1.2. Низата $\{a_n\}$ се нарекува *монотона* ако за секој $n \in N$, важи само едно од од неравенствата:

$$a_n \le a_{n+1} \text{ или } a_n \ge a_{n+1}.$$

При тоа:

1. Ако $a_n < a_{n+1}$, за секој $n \in N$, низата $\{a_n\}$ (*строго*) *монотоно расте*.

2. Ако $a_n \le a_{n+1}$, за секој $n \in N$, низата $\{a_n\}$ (*нестрого*) *монотоно расте* (*или не опаѓа*).

3. Ако $a_n > a_{n+1}$, за секој $n \in N$, низата $\{a_n\}$ (*строго*) *монотоно опаѓа*.

4. Ако $a_n \ge a_{n+1}$, за секој $n \in N$, низата $\{a_n\}$ (*нестрого*) *монотоно опаѓа* (*или не расте*).

Пример 3.1.1.2. $\{a_n\}$, $a_n = \dfrac{5n}{5n+1}$

$$a_n = \frac{5n}{5n+1}; \quad a_{n+1} = \frac{5(n+1)}{5(n+1)+1} = \frac{5n+5}{5n+6}$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{5n+5}{5n+6} - \frac{5n}{5n+1} = \frac{(5n+5)(5n+1) - 5n(5n+6)}{(5n+6)(5n+1)} =$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{25n^2 + 5n + 25n + 5 - 25n^2 - 30n}{(5n+6)(5n+1)} = \frac{5}{(5n+6)(5n+1)} > 0$$

=> $a_{n+1} - a_n > 0 \quad (\forall n \in N)$ значи низата е монотоно растечка.

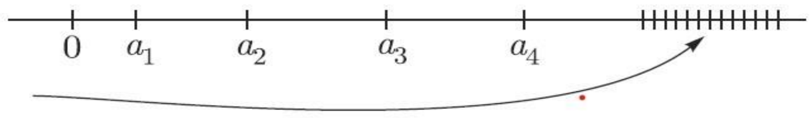
Дефиниција 3.1.1.3. ([10]) Низата $\{a_n\}$ се нарекува *ограничена* ако постојат реални броеви m и M такви што $m \le a_n \le M$, за секој $n \in N$.

Забелешка. Ако постои $M \in R$, таков што $a_n \le M$, за секој $n \in N$, се вели дека низа $\{a_n\}$ е *ограничена од горе* (*десно*).

Ако постои $m \in R$, таков што $a_n \ge m$, за секој $n \in N$, се вели дека низа $\{a_n\}$ е *ограничена од долу* (*лево*).

3.1.2. Точка на натрупување на низи

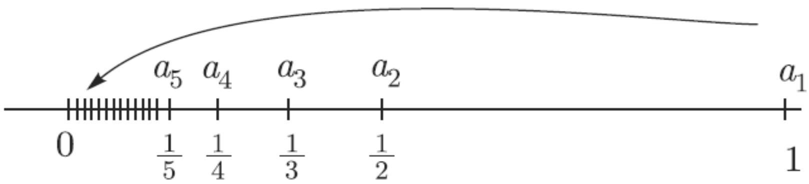
Нека е дадена една низа $\{a_n\}$. Ако членовите на низата ги разгледуваме како точки од бројна права, тогаш измената на членовите на низата по ред од првиот, вториот и сите следователни членови може да се разбере како движењена точките по бројната права т.е.



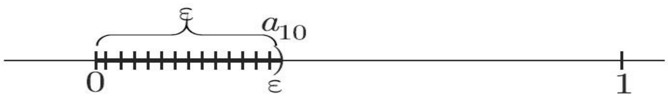
Притоа, може да настане една карактеристична појава при која бесконечно членови од низата се наоѓаат во еден мал интервал [2].

Дефиниција 3.1.2.1. ([10]) Точката $a \in R$ се вика *точка на натрупување* (или *атхерентна точка*) за низата $\{a_n\}$, $a_n \in R$ ако во секоја нејзина ε -околина се наоѓаат бесконечно многу членови од низата т.е. ако за секое $\varepsilon > 0$, важи $a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ за бесконечно многу $n \in N$ т.е. $|a_n - a| < \varepsilon$, за бесконечно многу $n \in N$.

Пример 3.1.2.1. Да ја разгледаме низата (a_n), каде $a_n = \dfrac{1}{n}$ и да претставиме на бројна права неколку нејзини почетни членови.



Можеме да забележиме дека точките кои одговараат на овие членови од низата се движат од 1 , монотоно опаѓајќи кон нулата, која не е член на низата.
Ако земеме ε, на пример $\varepsilon = \dfrac{1}{10}$, во ε -околината на 0 т.е. интервалот $(\varepsilon, \varepsilon)$ ќе се најдат членовите $a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots$, и нив ги има бесконечно многу.



Надвор од оваа ε -околина има 10 члена. Во овој случај велиме дека низата се натрупува околу точката $a = 0$.

3.1.3. Гранична вредност на низа. Конвергенција. Дивергенција

Дефиниција 3.1.3.1. ([6]) Велиме дека низата $\{a_n\}$ конвергира кон реалниот број a или дека a е лимес (гранична вредност) на низата $\{a_n\}$ и пишуваме

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a,$$

Ако за секој $\varepsilon > 0$, постои природен број $n_0 \in N$ (кој зависи од ε) таков што да важи

$$|a_n - a| < \varepsilon, \text{ за } n > n_0.$$

Од дефиницијата е јасно дека во секоја околина на точката a се наоѓаат бесконечно многу членови на низата, а надвор од секоја околина се наоѓаат конечно многу. Тоа значи дека точката a е точка на натрупување на низата.

Дефиниција 3.1.3.2. ([10]) Низата, која што има конечна гранична вредност се вика *конвергентна низа.*

Теорема 3.1.3.1. ([6]) Секоја конвергентна низа има една гранична вредност.

Доказ: Нека низата $\{a_n\}$ има две гранични вредности a_1 и a_2 и нека го означиме бројот $|a_2 - a_1| = \varepsilon$. Бидејќи a_1 и a_2 се граници за низата $\{a_n\}$ следува дека постојат броеви n_1 и n_2 такви што

$$|a_n - a_2| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ за } n > n_2 \text{ и } |a_n - a_1| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ за } n > n_1.$$

Ако сега означиме $n_0 = \max(n_1, n_2)$, тогаш за $n > n_0$ добиваме

$$\varepsilon = |a_2 - a_1| = |a_2 - a_n + a_n - a_1| \le |a_2 - a_n| + |a_n - a_1| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

кое не е можно, бидејќи добивме $\varepsilon < \varepsilon$, па спрема тоа не е добра претпоставката дека една конвергентна низа има две граници. Значи, $a_1 = a_2$.

Теорема 3.1.3.2. ([2]) Секоја конвергентна низа е ограничена.

Доказ: Нека $\{a_n\}$ е конвергентна низа т.е. $a \in R$, така што $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

а) Ако $a \ne 0,$ тогаш за секое $\varepsilon > 0$, па и за $\varepsilon = \frac{|a|}{2}$, постои $n_0 \in N$ таков што $|a_n - a| < \frac{|a|}{2}$ за сите $n \ge n_0$. Од стввојствата на апсолутна вредност имаме

$$|a_n| - |a| \le \big||a_n| - |a|\big| \le |a_n - a| < \frac{|a|}{2} \text{ за секој } n > n_0, \text{ т.е. } |a_n| < \frac{3}{2}|a|, \text{ за секој } n > n_0.$$

Ако избереме $M = \max\left\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_0}|, \frac{3}{2}|a|\right\}$, тогаш $|a_n| < M$, за секој $n \in N$ т.е $\{a_n\}$ е ограничена.

б) Ако $a = 0,$ тогаш за $\varepsilon = \frac{1}{2}$, постои $n_0 \in N$ таков што $|a_n| < \frac{1}{2}$, за сите $n > n_0$. Тогаш за M избираме $M = \max\left\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_0}|, \frac{1}{2}\right\}$, и добиваме дека $|a_n| < M$, за сите $n \in N$ т.е. $\{a_n\}$ е органичена.

Обратното тврдење од својството изнесено во оваа теорема не е точно, т.е. не секоја ограничена е конвергентна, што се гледа од примерот $a_n = (-1)^n$; ова низа е огреаничена, но не е конвергентна.

Теорема 3.1.3.3. Секоја монотона и ограничена низа е конвергентна.

Доказ: Нека $\{a_n\}$ е монотоно растечка и ограничена низа односно множеството на вредности $S=\{a_n \mid a_n \in \{a_n\}\}$ е ограничено. Нека $a=\sup S \in R$. Сега имаме дека $a_n < a$ за секој $n \in N$ природен број. Од дефиницијата за супремум следува дека за секој $\varepsilon > 0$ постои природен број n_0 таков што $a-\varepsilon < a_{n_0} < a$, односно $|a_n - a| < \varepsilon$, за $n > n_0$, што значи конвергенција на низата $\{a_n\}$ и имаме

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup S .$$

На сличен начин се докажува конвергенцијата ако низата е монотоно опаднувачка. Тогаш постои инфимум на множеството S и притоа имаме

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf S .$$

Теорема 3.1.3.4. ([13]) (за “сендвич- низа”) Нека $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ се две конвергентни низи со иста граница a и нека за секој $n \in N$ е $a_n \le c_n \le b_n$. Тогаш и $\{c_n\}$ е конвергентна низа, при што $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$.

Доказ: За кој било реален број $\varepsilon > 0$, надвор од интервалот $(a-\varepsilon,\, a+\varepsilon)$ може да има само конечен број членови на низата $\{a_n\}$ и, исто така, само конечен број членови на $\{b_n\}$. Тоа значи дека постојат $n_1,\, n_2 \in N$ такви што за $n > n_1$, $a_n \in (a-\varepsilon,\, a+\varepsilon)$, додека за $n > n_2$, $b_n \in (a-\varepsilon,\, a+\varepsilon)$. Ако ставиме $n_0 = \max\{n_1,\, n_2\}$, тогаш за $n > n_0$ имаме дека $a_n,\, b_n \in (a-\varepsilon,\, a+\varepsilon)$ и бидејќи $a_n \le c_n \le b_n$, за $n > n_0$ добиваме дека $c_n \in (a-\varepsilon,\, a+\varepsilon)$ што покажува дека a е граница и на низата $\{c_n\}$.

Дефиниција 3.1.3.3. ([10]) Низа која што не е конвергентна се нарекува *дивергентна низа.*

3.2. БРОЈНИ РЕДОВИ

3.2.1. Поим за ред. Основни својства

Дефиниција 3.2.1.1. ([1]) Изразот: $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots a_i + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$, од бесконечната низа на реални броеви се нарекува *бесконечен броен ред* или само *ред*, каде што $a_1, a_2, a_3, \ldots$ на редот.

Со едноподруго собирање на членови од низата $\{a_n\}$ добиваме нова низа што ќе се означува со $\{S_n\}$, на следниов начин:

$$
\begin{gathered}
S_1 = a_1 \\
S_2 = a_1 + a_2 \\
S_3 = a_1 + a_2 + a_3 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
S_{n-1} = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} \\
S_{n+1} = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + a_{n+1}
\end{gathered}
$$

т.е.

$$\{S_n\} = \{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots a_n\}.$$

Секој член на низата $\{S_n\}$ е конечен збир на првите *n*- членови од низата $\{a_n\}$, и кратко се пишува $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$.

Збирот S_n се нарекува *n*-та *парцијална сума* од членовите на низата $\{a_n\}$.

Дефиниција 3.2.1.2. ([4]) Редот чии членови се членовите на редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, почнувајќи од $(k+1)$ − от член на редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, земени во истиот редослед како и во почетниот ред, го нарекуваме *k – ти остаток на редот* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и го означуваме со $\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$.

Дефиниција 3.2.1.3. ([10]) Ако постои конечна гранична вредност, S, на низата од *n*-тата парцијална сума, $\{S_n\}$, т.е. $S = \lim_{n\to\infty} S_n$, тогаш велиме дека бесконечниот ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е *конвергентен* со збирот S и пишуваме $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Дефиниција 3.2.1.4. ([10]) Ако низата $\{S_n\}$ е дивергентна, тогаш велиме дека редот $\sum_{i=1}^{n} a_i$ е *дивергентен*.

Ако *k*-от остаток на редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира, тогаш неговиот збир ќе го означиме со R_k, т.е.

$$R_k = \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$$

и едноставно ќе го нарекуваме *остаток на редот*.

Теорема 3.2.1.1. ([4]) Редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е конвергентен ако и само ако редот $\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$ конвергентен.

Доказ: Нека $S_m = \sum_{n=1}^{m} a_n$ и $T_m = \sum_{n=k+1}^{m} a_n, m \geq k$. Тогаш важи равенството $T_m = S_m - \sum_{n=k+1}^{m} a_n$, Бидејќи збирот $\sum_{n=1}^{k} a_n$ е константен, добиваме дека низата $\{T_m\}_{m=k+1}^{\infty}$ конвергира ако и само ако низата $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$, што значи редот $\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$ конвергира ако и само ако редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира.

Теорема 3.2.1.2. ([4]) Ако редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира, тогаш $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Доказ: Ако редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира, тогаш низата парцијални суми $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ конвергира. Нека Тогаш, од равенствата $a_n = S_n - S_{n-1}, n = 2,3,...$ следува дека

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0.$

Теорема 3.2.1.3. ([4]) Ако редовите $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ конвергираат, при што нивните суми се еднакви на S' и S'', соодветно, тогаш за секои α, β ∈ R редот $\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n)$, исто така, конвергира и ако S е неговата сума, тогаш $S = aS' + \beta S''$.

Доказ: Нека

$S_n' = \sum_{k=1}^{n} a_k, \qquad S_n'' = \sum_{k=1}^{n} b_k, \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n}(\alpha a_k + \beta b_k).$

Тогаш,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=1}^{n} a_k + \beta \sum_{k=1}^{n} b_k = \alpha S_n^{'} + \beta S_n^{''}$$

и бидејќи $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^{'}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^{''}$ постојат, добиваме дека и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ постои, т.е. редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$, конвергира и притоа важи

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(\alpha S_n^{'} + \beta S_n^{''}\right) = \alpha \lim_{n\to\infty} S_n^{'} + \beta \lim_{n\to\infty} S_n^{''} = \alpha S^{'} + \beta S^{''}.$$

Пример 3.2.1.1. Да се испита конвергентноста на дадениот ред со помош на граничниот критериум со споредба.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{n}{(n+2)^3} \qquad s=3 \quad r=1 \quad \alpha = s-r = 3-1 = 2$$

Дадениот ред да го споредиме со конвергентниот ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{1}{n^2}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{(n+2)^3}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{(n+2)^3} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+3}\right)^3 =$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\frac{n+2}{n}}\right)^3 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^3} = 1 > 0$$

Значи дадениот ред конвергира.

4. АРИТМЕТИЧКА ПРОГРЕСИЈА

4.1. Дефиниција на аритметичка прогресија

“За да си господар на знаењето, мора да си роб на работата”
Хоноре Де Балзак

Дефиниција 4.1.1. ([8]) Низата $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n, \ldots$ во којашто разликата помеѓу било кој нејзин член, со исклучок на првиот, и претходниот е една иста се нарекува *аритметичка прогресија* или *аритметичка низа*.
Константата d се нарекува *разлика* на аритметичката низа.

Значи, аритметичката прогресија е низа $\{a_n\}$ зададена со рекурентната формула

$$a_n = a_{n-1} + d,\ n = 2, 3, \ldots, \qquad (1)$$

каде што d е константа.
Ако $d > 0$, тогаш од формулата (1) имаме $a_n > a_{n-1}$, што покажува дека аритметичката прогресија строго монототно расте, ако $d < 0$ тогаш имаме $a_n < a_{n-1}$, што покажува дека прогресијата строго монотоно опаѓа.
Од дефиницијата за аритметичка прогресија имаме:

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d$$

$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d$$
....
....
....
$$a_{n-1} = a_{n-2} + d = a_1 + (n-3)d + d = a_1 + (n-2)d$$

$$a_n = a_{n-1} + d = a_1 + (n-2)d + d = a_1 + (n-1)d$$

Значи, општиот чен на аритметичката низа со прв член a_1 и со разлика d е

$$a_n = a_1 + (n-1)d, \quad n \in N \qquad (2)$$

4.2. Својства на аритметичка прогресија

Во продолжение се дадени неколку својства на аритметичката прогресија и нивните докази.

1. Нека $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n, \ldots$ е аритметичка прогресија. Тогаш, за секој $n \in N$, и за сите $k \in N,\ 1 \le k \le n$ важи

$$a_k + a_{n-(k-1)} = a_1 + a_n.$$

Доказ: Од формула (2) за општиот член, добивале

$$\begin{aligned} a_k + a_{n-k+1} &= a_1 + (k-1)d + a_1 + (n-k+1-1)d = \\ &= a_1 + a_1 + (k-1+n-k)d = \\ &= a_1 + \underbrace{a_1 + (n-1)d}_{=a_n} = a_1 + a_n \end{aligned}$$

Ова својство значи дека збирот на членовите кои се подеднакво "одалечени" од членовите a_1 и a_n е еднаков на збирот a_1 и a_n. [10]

2. За кои било три последователни члена од една аритметичка прогресија $a_{n-1},\ a_n,\ a_{n+1}$, важи:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

Доказ: Нека е дадена аритметичката прогресија $a_1,\ a_2,\ a_3,\dots,\ a_{n-1},\ a_n,\ a_{n+1},\dots$. Од дефиницијата за аритметичка прогресија имаме

$$a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n \ \Rightarrow\ 2a_n = a_{n-1} + a_{n+1} \ \Rightarrow\ a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$ [7]

Значи, секој член на аритметичка прогресија, со исклучок на првиот, е аритметичка средина од неговите соседни членови.

За природа на аритметичката прогресија, во смисол на нејзина конвергенција – дивергенција, имаме:

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}[a_1 + (n-1)d] = \lim_{n\to\infty} a_1 + d \lim_{n\to\infty}(n-1) = \\ &= a_1 + d\cdot(+\infty) = a_1 + \begin{cases} +\infty & за \quad d>0 \\ -\infty & за \quad d<0 \end{cases} = \begin{cases} +\infty & за \quad d>0 \\ -\infty & за \quad d<0 \end{cases}. \end{aligned}$$

Така следи:

Теорема 4.2.1. ([8]) Секоја аритметичка низа $\{a_n\}$ е дивергентна низа.

Својството 3 ја дава формулата за пресметување на збирот

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots a_{n-1} + a_n \qquad (3)$$

на првите n - членови од една аритметичката прогресија.

3. За збирот S_n на првите n -членови од аритметичката прогресија $a_1,\ a_2,\ a_3,\ldots,\ a_{n-1},\ a_n,\ldots$ важи формулата

$$S_n = \frac{n}{2}\left(a_1 + a_n\right) \tag{4}$$

Доказ: Збирот (3) го пишуваме како

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_3 + \ldots a_2 + a_1 \tag{3'}$$

Собирајќи ги (3) и (3') се добива

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \cdots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1).$$

Од својството 1. добиваме $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = \ldots = a_n + a_1$. Односно,

$$2S_n = n\left(a_1 + a_n\right) \Rightarrow S_n = \frac{n}{2}\left(a_1 + a_n\right).$$

Со замена на $a_n = a_1 + (n-1)d$ во формулата (4) се добива

$$S_n = \frac{n}{2}\left[2a_1 + \left(n-1\right)d\right],$$

Со која што исто така се пресметува збирот на првите n - членови од аритметичката прогресија кога е даден првиот член a_1 и разликата d. [7]

4.3. Примена на аритметичката прогресија во решавање проблеми од економијата со користење на Wolfram Mathematica

Пример 4.3.1. ([1]) За производното претпријатие **“ХАШКОМ”**, во првото полугодие од годината, можат да се извлечат следниве податоци: оствареното производство во првиот и четвртиот месец намалено за оствареното производство во третиот месец изнесува 9.000 килограми од некој производ, а оствареното производство во првиот и петиот месец изнесува 20.000 килограми. Ако производството во првото полугодие од годината се одвивало по принцип на аритметичка прогресија која расте, тогаш да се пресмета оствареното производство во првиот и во шестиот месец?

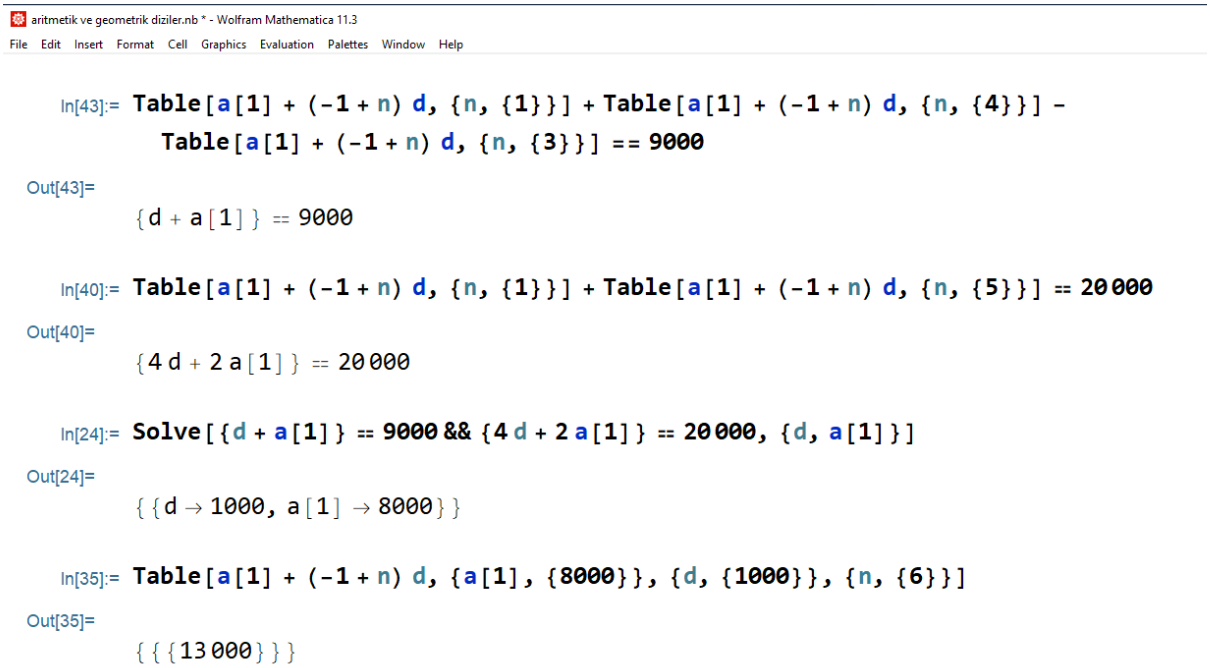
Решение:

$$\begin{cases} a_1 + a_4 - a_3 = 9000 \\ a_1 + a_5 = 20000 \end{cases} <=> \begin{cases} a_1 + (a_1 + 3d) - (a_1 + 2d) = 9000 \\ a_1 + (a_1 + 4d) = 20000 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 + d = 9000 \\ 2a_1 + 4d = 20000 / : (-2) \end{cases} <=> \begin{cases} a_1 + d = 9000 \\ -a_1 - 2d = -10000 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = 9000 - 1000 \\ d = 1000 \end{cases} <=> \begin{cases} a_1 = 8000 \\ d = 1000 \end{cases}$$

$$a_6 = a_1 + 5d = 8000 + 5 \cdot 1000 = 13000$$



Слика 1. Решение на пример 4.3.1.

Пример 4.3.2. Добиен е потрошувачки кредит во износ од **190.000 ден.,**и истиот треба да се врати за **19** месеци со каматна стапка од **6%** Кредитот треба да се отплатува со еднакви месечни рати. Да се пресмета:

а) вкупната камата и

б) просечната месечна рата?

Решение:

$a)$ $190000 : 19 = 10000$ *е месечната отплата*.

$$k = \frac{S \cdot p \cdot m}{1200}$$

$$k_1 = \frac{190000 \cdot 6}{1200} = 950$$

$$k_2 = \frac{(190000 - 10000) \cdot 6}{1200} = 900$$

....

....

....

$$k_{18} = \frac{(190000 - 17 \cdot 10000) \cdot 6}{1200} = 100$$

$$k_{19} = \frac{(190000 - 18 \cdot 10000) \cdot 6}{1200} = 50$$

$$k_1 + k_2 + k_3 + \cdots + k_{18} + k_{19} = 9500$$

$б)$ $\text{Месечната рата} = \dfrac{190000 + 9500}{19} = 10500$ *денари*.

Втор начин:

$a)\qquad k_1 = a_1 = 950 \qquad k_2 = a_2 = 900 \qquad k_3 = a_3 = 850$

$$d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = -50 \qquad n = 19 \qquad S_{17} = ?$$

$$S_{19} = \frac{n}{2}[\ 2a_1 + (n-1)d\ ]$$

$$S_{19} = \frac{19}{2}[2 \cdot 950\ + (19-1\ ) \cdot (-50\ )\ ]$$

$$S_{19} = \frac{19}{2} \cdot [\ 1900\ +\ 18 \cdot (-50\ )]$$

$$S_{19} = \frac{19}{2} \cdot (1900 - 900\ )$$

$$S_{19} = \frac{19}{2} \cdot 1000 = 9500$$

$$S_{19} = 9500 \quad \text{денари вкупна камата}.$$

$б)\qquad \text{месечна рата} = \frac{190000 + 9500}{19000} = \frac{199500}{19} = 10500 \text{ денари.}$

Трет начин:

$$k_1 = \frac{S \cdot p}{1200}$$

$$k_2 = \frac{\left(S - \frac{S}{n}\right) \cdot p}{1200} = \frac{S \cdot p}{1200}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

$$k_3 = \frac{\left(S - 2\frac{S}{n}\right) \cdot p}{1200} = \frac{S \cdot p}{1200}\left(1 - \frac{2}{n}\right)$$

$$k_4 = \frac{\left(S - 3\frac{S}{n}\right) \cdot p}{1200} = \frac{S \cdot p}{1200}\left(1 - \frac{3}{n}\right)$$

....

....

....

$$k_{n-1} = \frac{\left(S - (n-2)\frac{S}{n}\right) \cdot p}{1200} = \frac{S \cdot p}{1200}\left(1 - \frac{n-2}{n}\right) = \frac{S \cdot p}{1200}\frac{2}{n}$$

$$k_n = \frac{\left(S - (n-1)\frac{S}{n}\right) \cdot p}{1200} = \frac{S \cdot p}{1200}\left(1 - \frac{n-1}{n}\right) = \frac{S \cdot p}{1200}\frac{1}{n}$$

$$\sum_{i=1}^{n} k_i = k_1 + k_2 + k_3 + \cdots + k_{n-1} + k_n$$

$$\sum_{i=1}^{n} k_i = \frac{S \cdot p}{1200} + \frac{S \cdot p}{1200}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{S \cdot p}{1200}\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots + \frac{S \cdot p}{1200}\frac{2}{n} + \frac{S \cdot p}{1200}\frac{1}{n}$$

$$\sum_{i=1}^{n} k_i = \frac{S \cdot p}{1200}\left[1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots + \frac{2}{n} + \frac{1}{n}\right] \Rightarrow \quad a_1 = 1 \quad a_n = \frac{1}{n}$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{n(n+1)}{2n} = \frac{n+1}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} k_i = \frac{S \cdot p}{1200} S_n = \frac{S \cdot p}{1200} \frac{n+1}{2} = S \frac{p(n+1)}{2400} = S\,k \qquad k = \frac{p(n+1)}{2400}$$

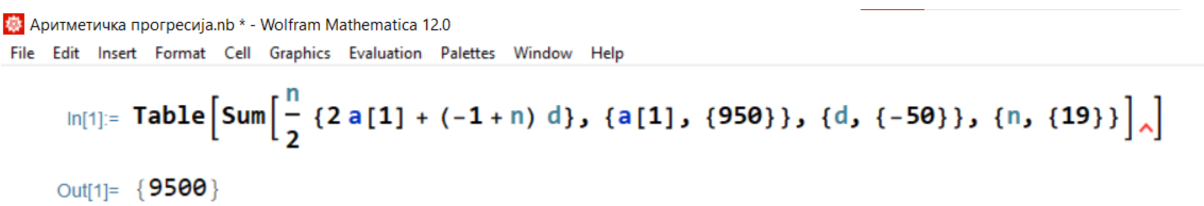
$a)$ $$\sum_{i=1}^{n} k_i = S\,k = S \frac{p(n+1)}{2400} = 190000 \cdot \frac{6(19+1)}{2400}$$

$$\sum_{i=1}^{19} k_i = 190000 \frac{6 \cdot 20}{2400} = 190000 \cdot 0{,}05 = 9500 \text{ денари вкупна камата}$$

$б)$ $$\text{месечна рата} = \frac{190000 + 9500}{19} = 10500 \text{ денари}.$$

Ако кредитот се отплатува со еднакви годишни рати, во тој случај, коефициентот k се пресметува на следниов начин:

$$k = \frac{p\,(n+1)}{200}$$



Слика 2. Решение на пример 4.3.2.

Пример 4.3.3. ([3]) Со цел да го измири долгот према доверителот, должникот во првиот месец ќе му плати **250€** од долгот, во вториот месец **240€,** во третиот месец **230€,** и истиот однос во месечните рати го задржува и во наредните **10** месеци. Да се пресмета долгот и последната месечна рата**?**

Решение:

$$a_1 = 250 \quad a_2 = 240 \quad a_3 = 230 \quad n = 10 \quad S_{10} = ? \quad a_{10} = ?$$

$$d = a_2 - a_1 = 240 - 250 = -10 \qquad \text{или} \qquad d = a_3 - a_2 = 230 - 240 = -10$$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] \qquad a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$S_{10} = \frac{10}{2}[2 \cdot 250 + (10-1)(-10)] \qquad a_{10} = 250 + (10-1)(-10)$$

$$S_{10} = \frac{10}{2}[500 - 90] \qquad a_{10} = 250 - 90$$

$$S_{10} = 5 \cdot 410 = 2050 \textit{ евра} \qquad a_{10} = 160 \textit{ евра}$$

Аритметичка прогресија.nb * - Wolfram Mathematica 12.0

File Edit Insert Format Cell Graphics Evaluation Palettes Window Help

```
In[∘]:= Table[-a[1] + a[1 + n], {a[1], {250}}, {a[2], {240}}, {a[3], {230}}, {n, {1}}]
Out[∘]= {{{{-10}}}}

In[∘]:= Table[ a[1] + (-1 + n) d, {a[1], {250}}, {d, {-10}}, {n, {10}}]
Out[∘]= {{{160}}}

In[∘]:= Table[Sum[ a[1] + (-1 + n) d, {a[1], {250}}, {d, {-10}}, {n, 10}]]
Out[∘]= 2050
```

Слика 3. Решение на пример 4.3.3.

Пример 4.3.4. ([3]) Производството во месец **мај** изнесува **5200 тони** од некој производ, а во месец **август 4600 тони** Ако производството се намалувало по е принцип на аритметичка прогресија, тогаш да се пресмета :

а) просечното месечно намалување на производството,

б) вкупното производство за цела година и,

в) за колку месеци ќе се произведат вкупно **93000 тони?**

Решение:

$$a_5 = 5200 \quad a_8 = 4600 \quad d = ? \quad a_{12} = ? \quad S_{12} = ? \quad S_n = 93000 \quad n = ?$$

$$a)\ \begin{cases} a_5 = a_1 + 4d \\ a_8 = a_1 + 7d \end{cases} <=> \begin{cases} a_1 + 4d = 5200 \\ a_1 + 7d = 4600 / \cdot (-1) \end{cases} <=> \begin{cases} a_1 + 4d = 5200 \\ -a_1 - 7d = -4600 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 + 4d = 5200 \\ -3d = 600 / \cdot (-1) \end{cases} <=> \begin{cases} a_1 + 4d = 5200 \\ 3d = -600 \end{cases} <=> \begin{cases} a_1 + 4d = 5200 \\ d = -200 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 + 4 \cdot (-200) = 5200 \\ d = -200 \end{cases} <=> \begin{cases} a_1 = 5200 + 800 \\ d = -200 \end{cases} <=> \begin{cases} a_1 = 6000 \\ d = -200 \end{cases}$$

$$б)\ S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$

$$S_{12} = \frac{12}{2}[2 \cdot 6000 + (12-1) \cdot (-200)]$$

$$S_{12} = 6\ (12000 - 2200)$$

$$S_{12} = 6 \cdot 9800 = 58800 \quad \text{тони.}$$

$в)\quad S_n = 93000 \qquad\qquad n = ?$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$

$$\frac{n}{2}[2\cdot 6000 + (n-1)(-200)] = 93000$$

$$\frac{n}{2}(12000 - 200n + 200) = 93000$$

$$n(12200 - 200n) = 186000$$

$$-200n^2 + 12200n - 186000 = 0 \,/ : (-200)$$

$$n^2 - 61n + 930 = 0$$

$$n^2 - 61n + 930 = 0, \quad a = 1,\ b = -61,\ c = 930$$

$$n_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$n_{1/2} = \frac{61 \pm \sqrt{(-61)^2 - 4\cdot 1\cdot 930}}{2\cdot 1}$$

$$n_{1/2} = \frac{61 \pm \sqrt{3721 - 3720}}{2}$$

$$n_{1/2} = \frac{61 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{61 \pm 1}{2}$$

$$n_1 = \frac{61+1}{2} = \frac{62}{2} = 31 \qquad n_1 = \frac{61-1}{2} = \frac{60}{2} = 30$$

```
aritmetik 2.nb * - Wolfram Mathematica 11.3
File  Edit  Insert  Format  Cell  Graphics  Evaluation  Palettes  Window  Help

a)

In[∘]:= Table[a[1] + (-1 + n) d, {n, {5}}] == 5200
Out[∘]= {4 d + a[1]} == 5200

In[∘]:= Table[a[1] + (-1 + n) d, {n, {8}}] == 4600
Out[∘]= {7 d + a[1]} == 4600

In[∘]:= Solve[{4 d + a[1]} == 5200 && {7 d + a[1]} == 4600]
Out[∘]= {{d → -200, a[1] → 6000}}

б)

In[∘]:= Table[Sum[ a[1] + (-1 + n) d, {a[1], {6000}}, {d, {-200}}, {n, 12}]]
Out[∘]= 58800

в)

In[43]:= Solve[Table[1/2 n (d (-1 + n) + 2 a[1]), {a[1], {6000}}, {d, {-200}}] == 93000]

Out[43]= {{n → 30}, {n → 31}}
```

Слика 4. Решение на пример 4.3.4.

Пример 4.3.5. Собрана е парична помош за **40** семејства настрадани од поплава, поделбата ќе се врши така што најмногу загрозеното семејство да добие **240.000 ден.,**а секое наредно да добие **5.000 ден.** Помалку од претходното семејство. Да се пресмета:
а) износот на собраната парична помош и
б) колку добило најмалку загрозеното семејство?

Решение:

$$a_1 = 240000 \qquad d = -5000 \qquad n = 40 \quad S_{40} = ? \quad a_{40} = ?$$

$a)$ $$S_n = \frac{n}{2}[\ 2a_1 + (n-1)d\ ]$$

$$S_{40} = \frac{40}{2}[2 \cdot 240000 + (40-1\ ) \cdot (-5000\ )\ ]$$

$$S_{40} = 20 \cdot [\ 480000\ +\ 39 \cdot (-5000\ )] = 20 \cdot (480000 - 195000\ )$$

$$S_{40} = 20 \cdot 285000$$

$$S_{40} = 5700000\ \ денари\,.$$

$б)$

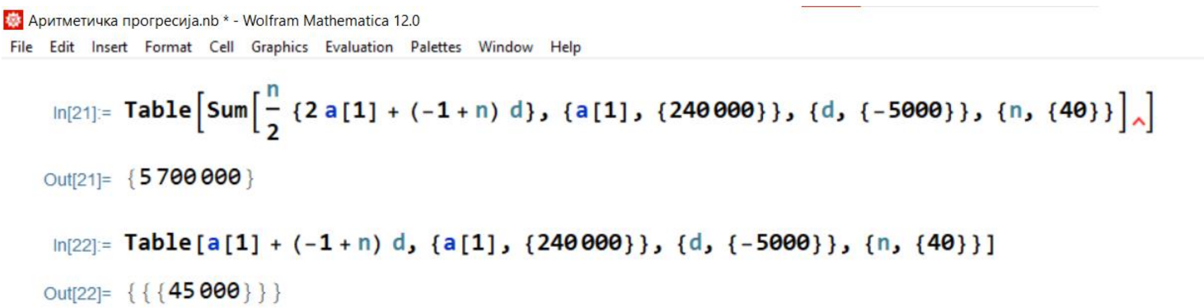
$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_{40} = 240000 + (40-1) \cdot (-5000\,)$$

$$a_{40} = 240000 + 39 \cdot (-5000\,)$$

$$a_{40} = 240000 - 195000$$

$$a_{40} = 45000\ \ денари.$$



Слика 5. Решение на пример 4.3.5.

Пример 4.3.6. ([3]) Збирот на оствареното производство од првиот и третиот месец изнесува **2080 тони**. од некој производ, а разликата меѓу оствареното производство од десеттиот и третиот месец изнесува **280 тони.** Ако производството се зголемувало по принцип на аритметичка прогресија, тогаш да се пресмета:

а) просечното месечно зголемување на производството и
произведената количина во првиот месец од годината,

б) за колку месеци ќе биде поизведено **20800** тони и

в) произведената количина во последниот месец од годината **?**

Решение:

$$a)\ \begin{cases} a_1 + a_3 = 2080 \\ a_{10} - a_3 = 280 \end{cases} <=> \begin{cases} a_1 + a_1 + 2d = 2080 \\ a_1 + 9d - (a_1 + 2d) = 280 \end{cases} <=> \begin{cases} 2a_1 + 2d = 2080 / : 2 \\ a_1 + 9d - a_1 - 2d = 280 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 + d = 1040 \\ 7d = 280 \end{cases} <=> \begin{cases} a_1 + 40 = 1040 \\ d = 40 \end{cases} <=> \begin{cases} a_1 = 1040 - 40 \\ d = 40 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = 1000 \\ d = 40 \end{cases}$$

$$в)\ S_n = 20800 \qquad n = ?$$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$

$$\frac{n}{2}[2 \cdot 1000 + (n-1) \cdot 40] = 20800$$

$$\frac{n}{2}(2000 + 40n - 40) = 20800$$

$$n(1960 - 40n) = 41600$$

$$40n^2 + 1960n - 41600 = 0 / : (40)$$

$$n^2 + 49n - 1040 = 0$$

$$n^2 + 49n - 1040 = 0, \quad a = 1,\ b = 49,\ c = -1040$$

$$n_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$n_{1/2} = \frac{-49 \pm \sqrt{49^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1040)}}{2 \cdot 1}$$

$$n_{1/2} = \frac{-49 \pm \sqrt{2401 + 4160}}{2}$$

$$n_{1/2} = \frac{-49 \pm \sqrt{6561}}{2} = \frac{-49 \pm 81}{2}$$

$$n_1 = \frac{-49 + 81}{2} = \frac{32}{2} = 16 \qquad n = 16 \ \textit{е решение}$$

$$n_1 = \frac{-49 - 81}{2} = -\frac{130}{2} = -65 \notin N \text{, } \textit{не е решение}$$

$n_2 = 16$ е решение, додека $n_2 = -65$ не е решение, бидејќи нема економски смисол.

в)

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_{12} = a_1 + 11d$$

$$a_{12} = 1000 + 11 \cdot 40$$

$$a_{12} = 1440$$

Аритметичка прогресија.nb * - Wolfram Mathematica 12.0
File Edit Insert Format Cell Graphics Evaluation Palettes Window Help

```
a)

a[1] + (-1 + n) d

Out[•]= d (-1 + n) + a[1]

In[2]:= Table[a[1] + (-1 + n) d, {n, {1}}] + Table[a[1] + (-1 + n) d, {n, {3}}] == 2080

Out[2]= {2 d + 2 a[1]} == 2080

In[•]:= Table[a[1] + (-1 + n) d, {n, {10}}] - Table[a[1] + (-1 + n) d, {n, {3}}] == 280

Out[•]= {7 d} == 280

In[3]:= Solve[{2 d + 2 a[1]} == 2080 && {7 d} == 280, {d, a[1]}]

Out[3]= {{d → 40, a[1] → 1000}}

б)

In[4]:= Solve[Table[1/2 n (d (-1 + n) + 2 a[1]), {a[1], {1000}}, {d, {40}}] == 20800]

Out[4]= {{n → -65}, {n → 16}}

в)

In[•]:= Table[a[1] + (-1 + n) d, {a[1], {1000}}, {d, {40}}, {n, {12}}]

Out[•]= {{{1440}}}
```

Слика 6. Решение на пример 4.3.6.

Пример 4.3.7. ([3]) Во првите три месеци се произведени **360 килограми** од некој производ, додека производот од оствареното производство во првиот и вториот месец изнесува **13200 т**. Ако производството се одвивало по принцип на аритметичка прогресија која расте, тогаш да се пресмета:

а) произведената количина во првото и второто полугодие во годината,

б) во кој месец се произведени **220 килограми** и

в) за колку месеци е остварено производство од **1760 килограми**?

Решение:

$$a)\ \begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 360 \\ a_1 \cdot a_2 = 13200 \end{cases} <=> \begin{cases} a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d = 360 \\ a_1(a_1 + d) = 13200 \end{cases} <=> \begin{cases} 3a_1 + 3d = 360/:3 \\ a_1{}^2 + a_1 d = 13200 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 + d = 120 \\ a_1{}^2 + a_1 d = 13200 \end{cases} <=> \begin{cases} a_1 = 120 - d \\ (120-d)^2 + (120-d)d = 13200 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = 120 - d \\ 14400 - 240d + d^2 + 120d - d^2 = 13200 \end{cases} <=> \begin{cases} a_1 = 120 - d \\ -120d = 13200 - 14400 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = 120 - d \\ -120d = -1200/\cdot(-1) \end{cases} <=> \begin{cases} a_1 = 120 - d \\ d = 10 \end{cases} <=> \begin{cases} a_1 = 120 - 10 \\ d = 10 \end{cases} <=> \begin{cases} a_1 = 110 \\ d = 10 \end{cases}$$

$$a_1 = 110 \qquad d = 10 \qquad n = 6 \qquad S_6 = ? \qquad S_{12} = ? \qquad S_{12} - S_6 = ?$$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$

$$S_6 = \frac{6}{2}[2 \cdot 110 + (6-1) \cdot 10]$$

$$S_6 = 3(220 + 50)$$

$$S_6 = 3 \cdot 270 = 810 \ \textit{килограми}$$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$

$$S_{12} = \frac{12}{2}[2 \cdot 110 + (12-1) \cdot 10]$$

$$S_{12} = 6(220 + 110)$$

$$S_{12} = 6 \cdot 330 = 1980 \ \textit{килограми}$$

$$S_{12} - S_6 = 1980 - 810 = 1170 \ \textit{килограми}$$

$б) \quad a_1 = 110 \qquad d = 10 \qquad a_n = 220 \qquad n = ?$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$110 + (n-1)\cdot 10 = 220 <=> (n-1)\cdot 10 = 220 - 110$$

$$n - 1 = \frac{110}{10} <=> n = 11 + 1 = 12$$

$$n = 12$$

$в)\ S_n = 1760 \qquad a_{1n} = 110 \qquad d = 10 \qquad n = ?$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$

$$\frac{n}{2}[2 \cdot 110 + (n-1) \cdot 10)] = 1760$$

$$\frac{n}{2}(220 + 10n - 10) = 1760$$

$$n(210 + 10n) = 3520$$

$$10n^2 + 210n - 3520 = 0 \, / :10$$

$$n^2 + 21n - 352 = 0, \quad a = 1, \, b = 21, \, c = -352$$

$$n_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$n_{1/2} = \frac{-21 \pm \sqrt{21^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-352)}}{2 \cdot 1}$$

$$n_{1/2} = \frac{-21 \pm \sqrt{441 + 1408}}{2}$$

$$n_{1/2} = \frac{-21 \pm \sqrt{1849}}{2} = \frac{-21 \pm 43}{2}$$

$$n_1 = \frac{-21 + 43}{2} = \frac{22}{2} = 11 \qquad n = 11 \text{ е решение}$$

$$n_1 = \frac{-21 - 43}{2} = -\frac{64}{2} = -32 \notin N, \qquad \text{не е решение}$$

$n_1 = 11$ е решение, додека $n_2 = -32$ не е решение, бидејќи нема економски смисол.

```
arıtmetık son.nb * - Wolfram Mathematica 11.3
File  Edit  Insert  Format  Cell  Graphics  Evaluation  Palettes  Window  Help

          a)

          Table[a[1] + (-1 + n) d, {n, {1}}] + Table[a[1] + (-1 + n) d, {n, {2}}] +
            Table[a[1] + (-1 + n) d, {n, {3}}] == 360

Out[5]=   {3 d + 3 a[1]} == 360

In[∘]:=   Table[a[1] + (-1 + n) d, {n, {1}}] * Table[a[1] + (-1 + n) d, {n, {2}}] == 13200

Out[∘]=   {a[1] (d + a[1])} == 13200

In[∘]:=   Solve[{3 d + 3 a[1]} == 360 && {a[1] (d + a[1])} == 13200, {d, a[1]}]

Out[∘]=   {{d → 10, a[1] → 110}}

In[∘]:=   Table[Sum[ a[1] + (-1 + n) d, {a[1], {110}}, {d, {10}}, {n, 6}]]

Out[∘]=   810

In[∘]:=   Table[Sum[ a[1] + (-1 + n) d, {a[1], {110}}, {d, {10}}, {n, 12}]]

Out[∘]=   1980

In[∘]:=   Table[Sum[ a[1] + (-1 + n) d, {a[1], {110}}, {d, {10}}, {n, 12}]] -
            Table[Sum[ a[1] + (-1 + n) d, {a[1], {110}}, {d, {10}}, {n, 6}]]

Out[∘]=   1170
```

Слика 7-1. Решение на пример 4.3.7.

```
arıtmetık son.nb * - Wolfram Mathematica 11.3
File  Edit  Insert  Format  Cell  Graphics  Evaluation  Palettes  Window  Help

          б)

In[∘]:=   {a[n] - a[1] + d} / {d}

Out[∘]=   {(d - a[1] + a[n])/d}

In[39]:=  Solve[Table[{(d - a[1] + a[n])/d}, {a[n], {220}}, {a[1], {110}}, {d, {10}}] == n]

Out[39]=  {{n → 12}}

          в)

In[37]:=  Solve[Table[1/2 n (d (-1 + n) + 2 a[1]), {a[1], {110}}, {d, {10}}] == 1760]

Out[37]=  {{n → -32}, {n → 11}}
```

Слика 7-2. Решение на пример 4.3.7.

Пример 4.3.8. Фабриката "**ШУКОМ**" во првата година од своето постоење имала приход од **6.280.000 ден.,** а нејзините трошоци во истата година изнесувале **14.280.000 ден.** Со развитокот на фабриката, нејзините трошоци во истата година се намалувале секоја година за **760.000 ден.,** а приходите се зголемувале за **840.000 ден.**
Да се пресмета:
а) по колку години трошоците ќе бидат еднакви на приходите и
б) колкави ќе бидат приходите и трошоците таа година **?**

Решение:

$$\underline{\text{Приходи}}: \qquad\qquad \underline{\text{Трошоци}}:$$

$$a_1 = 6280000 \qquad\qquad b_1 = 14280000$$

$$d_a = 840000 \qquad\qquad d_a = -760000$$

$$n = ? \qquad\qquad n = ?$$

$a)$

$$\underline{a_n = b_n}$$

$$a_1 + (n-1)d_a = b_1 + (n-1)d_b$$

$$6280000 + (n-1)\cdot 840000 = 14280000 + (n-1)\cdot(-760000)$$

$$(n-1)\cdot 840000 + (n-1)\cdot 760000 = 14280000 - 6280000$$

$$1600000(n-1) = 8000000$$

$$(n-1) = \frac{8000000}{1600000} = 5$$

$$n = 6$$

$$\text{Приходи}: \quad a_6 = a_1 + (6-1)d_a = 6280000 + 5\cdot 840000 = 6280000 + 4200000 = 10480000\,\text{ден.}$$

$$\text{Трошоци}: \quad b_6 = b_1 + (6-1)d_b = 14280000 + 5\cdot(-760000) = 14280000 - 3800000 = 10480000\,\text{ден.}$$

-Од добиените резултати очигледно е дека приходите и трошоците во четвртата година од своето постоење се изедначени и изнесуваат **10.480.000** денари.

```
Untitled-1 * - Wolfram Mathematica 12.0
File  Edit  Insert  Format  Cell  Graphics  Evaluation  Palettes  Window  Help

In[1]:= Table[a[1] + (-1 + n) d[a], {a[1], {6 280 000}}, {d[a], {840 000}}]
Out[1]= {{6 280 000 + 840 000 (-1 + n)}}

In[7]:= Table[b[1] + (-1 + n) d[b], {b[1], {14 280 000}}, {d[b], {-760 000}}]
Out[7]= {{14 280 000 - 760 000 (-1 + n)}}

In[8]:= Solve[{{6 280 000 + 840 000 (-1 + n)}} == {{14 280 000 - 760 000 (-1 + n)}}]
Out[8]= {{n → 6}}

In[5]:= Solve[Table[a[1] + (-1 + n) d[a], {a[1], {6 280 000}}, {d[a], {840 000}}] ==
          Table[b[1] + (-1 + n) d[b], {b[1], {14 280 000}}, {d[b], {-760 000}}]]
Out[5]= {{n → 6}}

In[9]:= Table[a[1] + (-1 + n) d[a], {a[1], {6 280 000}}, {d[a], {840 000}}, {n, {6}}]
Out[9]= {{{10 480 000}}}

In[10]:= Table[b[1] + (-1 + n) d[b], {b[1], {14 280 000}}, {d[b], {-760 000}}, {n, {6}}]
Out[10]= {{{10 480 000}}}
```

Слика 8. Решение на пример 4.3.8.

Пример 4.3.9. ([3]) Две акционерски друштва **(“ХАШКОМ” и “ШУКОМ”)** се тесно поврзани во производниот процес, меѓу себе зависни од произведеното количество. **АД “ ХАШКОМ ”** произведува **7.200 кг.** на ден од некој производ, а **АД “ ШУКОМ ” 4.200 кг.** на ден. Ако се сака да се избегне оваа нерамноправност во производството, тогаш да се пресмета:

а) кога двете **АД** ќе произведат еднакво количество на производи, ако **АД “ ХАШКОМ”** го намалува производството, а **АД “ ШУКОМ ”** го зголемува производството за **60 кг.** на ден.,

б) колку вкупно **АД “ ХАШКОМ ”** ќе произведе до тој ден и

в) по колку килограми ќе произведуваат **АД (“ХАШКОМ ” и “ ШУКОМ ”)** на тој ден**?**

Решение:

$$\underline{A}:\qquad\qquad\qquad \underline{B}:$$

$$a_1 = 7200 \qquad\qquad b_1 = 4200$$

$$d_a = -60 \qquad\qquad d_a = 60$$

$$n = ? \qquad\qquad n = ?$$

$a)$

$$\underline{a_n = b_n}$$

$$a_1 + (n-1)d_a = b_1 + (n-1)d_b$$

$$7200 + (n-1)(-60) = 4200 + (n-1)60$$

$$7200 - 60n + 60 = 4200 + 60n - 60$$

$$-60n - 60n = 4200 - 60 - 7200 - 60$$

$$-120n = -3120 / \cdot (-1)$$

$$120n = 3120$$

$$n = \frac{3120}{120} = 26$$

$$n = 26$$

$б)$

$АД\ "ХАШКОМ":\quad a_{26} = a_1 + (26-1)d_a = 7200 + 25 \cdot (-60) = 7200 - 1500 = 5700\ \textit{килограми.}$

$АД\ "ШУКОМ":\quad b_{26} = b_1 + (26-1)d_b = 4200 + 25 \cdot 60 = 4200 + 1500 = 5700\ .\textit{килограми.}$

$в)$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d_a]$$

$$S_{26} = \frac{26}{2}[2 \cdot 7200 + (26-1) \cdot (-60)]$$

$$S_{26} = 13 \cdot [14400 + 25 \cdot (-60)] = 13 \cdot (14400 - 1500)$$

$$S_{26} = 13 \cdot 12900$$

$$S_{26} = 167.700\ \textit{килограми.}$$

в)
$$S_n = \frac{n}{2}[2b_1 + (n-1)d_b]$$

$$S_{26} = \frac{26}{2}[2 \cdot 4200 + (26-1) \cdot 60]$$

$$S_{26} = 13 \cdot [8400 + 25 \cdot 60] = 13 \cdot (8400 + 1500)$$

$$S_{26} = 13 \cdot 9900$$

$$S_{26} = 128.700 \ \textit{килограми.}$$

```
Аритметичка прогресија.nb * - Wolfram Mathematica 12.0
File  Edit  Insert  Format  Cell  Graphics  Evaluation  Palettes  Window  Help

In[37]:= a[1] + (-1 + n) d[a]
Out[37]= a[1] + (-1 + n) d[a]

In[39]:= Table[a[1] + (-1 + n) d[a], {a[1], {7200}}, {d[a], {-60}}]
Out[39]= {{7200 - 60 (-1 + n)}}

In[40]:= b[1] + (-1 + n) d[b]
Out[40]= b[1] + (-1 + n) d[b]

In[41]:= Table[b[1] + (-1 + n) d[b], {b[1], {4200}}, {d[b], {60}}]
Out[41]= {{4200 + 60 (-1 + n)}}

In[42]:= Solve[{{7200 - 60 (-1 + n)}} == {4200 + 60 (-1 + n)}]
Out[42]= {{n → 26}}

In[49]:= Solve[Table[a[1] + (-1 + n) d[a], {a[1], {7200}}, {d[a], {-60}}] ==
           Table[b[1] + (-1 + n) d[b], {b[1], {4200}}, {d[b], {60}}]]
Out[49]= {{n → 26}}

In[44]:= Table[a[1] + (-1 + n) d[a], {a[1], {7200}}, {d[a], {-60}}, {n, {26}}]
Out[44]= {{{5700}}}

In[45]:= Table[b[1] + (-1 + n) d[b], {b[1], {4200}}, {d[b], {60}}, {n, {26}}]
Out[45]= {{{5700}}}
```

Слика 9-1. Решение на пример 4.3.9.

-Од добиените резултати очигледно се гледа двете акционерски друштва во дваесет и шестиот ден од производството ќе произведуваат исто количество по 5700 килограми.

Аритметичка прогресија.nb * - Wolfram Mathematica 12.0

File Edit Insert Format Cell Graphics Evaluation Palettes Window Help

```
In[46]:= Table[Sum[n/2 {2 a[1] + (-1 + n) d[a]}, {a[1], {7200}}, {d[a], {-60}}, {n, {26}}]]
Out[46]= {167700}
In[47]:= Table[Sum[n/2 {2 b[1] + (-1 + n) d[b]}, {b[1], {4200}}, {d[b], {60}}, {n, {26}}]]
Out[47]= {128700}
```

Слика.9-2. Решение на пример 4.3.9.

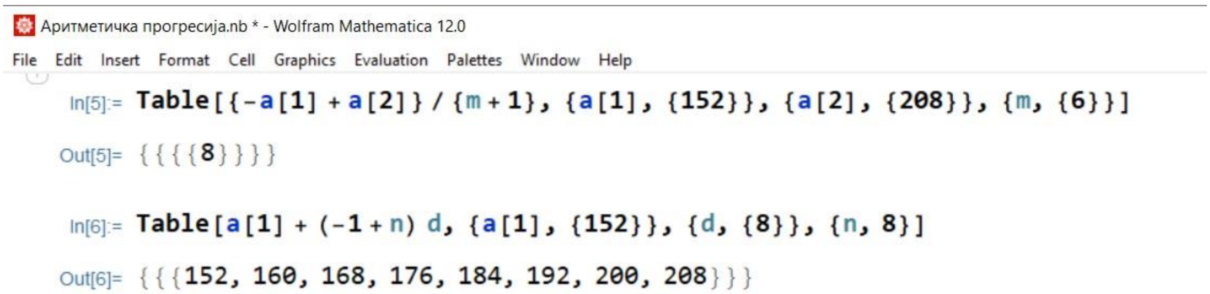
Пример 4.3.10. Да се вметнат (интерполираат) шест члена во аритметичката прогресија меѓу соседните членови152 и 208?

Решение:

$$m = 6 \qquad a_1 = 152 \qquad a_2 = 208$$

$$d_1 = \frac{d}{m+1} = \frac{a_2 - a_1}{m+1} = \frac{208-152}{6+1} = \frac{56}{7} = 8$$

$$\{\, 152, 160, 168, 176, 184, 192, 200, 208 \,\}$$



Аритметичка прогресија.nb * - Wolfram Mathematica 12.0

File Edit Insert Format Cell Graphics Evaluation Palettes Window Help

```
In[5]:= Table[{-a[1] + a[2]} / {m + 1}, {a[1], {152}}, {a[2], {208}}, {m, {6}}]
Out[5]= {{{{8}}}}
In[6]:= Table[a[1] + (-1 + n) d, {a[1], {152}}, {d, {8}}, {n, 8}]
Out[6]= {{{152, 160, 168, 176, 184, 192, 200, 208}}}
```

Слика 10. Решение на пример 4.3.10.

Пример 4.3.11. ([3]) Во градот “**Х**” бројот на туристите оваа година изнесува **12.000**, а се планира секоја наредна година бројот да се зголемува за по **2.000** туристи во споредба со претходната година. Бројот на туристи во градот “**Ш**” истата година изнесува **15.000** и се планира секоја наредна година тој број да се зголемува за по **1.500** туристи во споредба со претходната година. Врз основа на наведените податоци, да се пресмета:

а) колку години се потребни па вкупниот број туристи што го посетиле градот “**Х**” да се изедначи со вкупниот број туристи што го посетиле **“Ш”** и

б) колку години се потребни па вкупниот број туристи што ќе го посетат градот “**Х**” и “**Ш**” (заедно) да биде **772.500** ?

Решение:

$$\underline{A}:\qquad\qquad\qquad \underline{B}:$$

$$a_1 = 12000 \qquad\qquad b_1 = 15000$$

$$d_a = 2000 \qquad\qquad d_a = 1500$$

$$n = ? \qquad\qquad n = ?$$

$a)$ $$\underline{S_{n(A)} = S_{n(B)}}$$

$$\frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d_a] = \frac{n}{2}[2b_1 + (n-1)d_b]$$

$$\frac{n}{2}[2\cdot 12000 + (n-1)2000] = \frac{n}{2}[2\cdot 15000 + (n-1)1500] \quad /\cdot\frac{2}{n}$$

$$24000 + 2000n - 2000 = 30000 + 1500n - 1500$$

$$2000n - 1500n = 30000 - 1500 - 24000 + 2000$$

$$500n = 6500$$

$$n = \frac{6500}{500} = 13$$

$$n = 13$$

.

$б)$ $$\underline{S_{n(A)} + S_{n(B)} = 772500}$$

$$\frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d_a] + \frac{n}{2}[2b_1 + (n-1)d_b] = 772500 / \cdot 2$$

$$n[2\cdot 12000 + (n-1)2000] + n\cdot[2\cdot 15000 + (n-1)1500] = 1545000$$

$$24000n + 2000n^2 - 2000n + 30000n + 1500n^2 - 1500n = 1545000$$

$$3500n^2 + 50500n - 1545000 = 0 / : 500$$

$$7n^2 + 101n - 3090 = 0 \qquad a = 7, \quad b = 101, \quad c = -3090$$

$$n_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

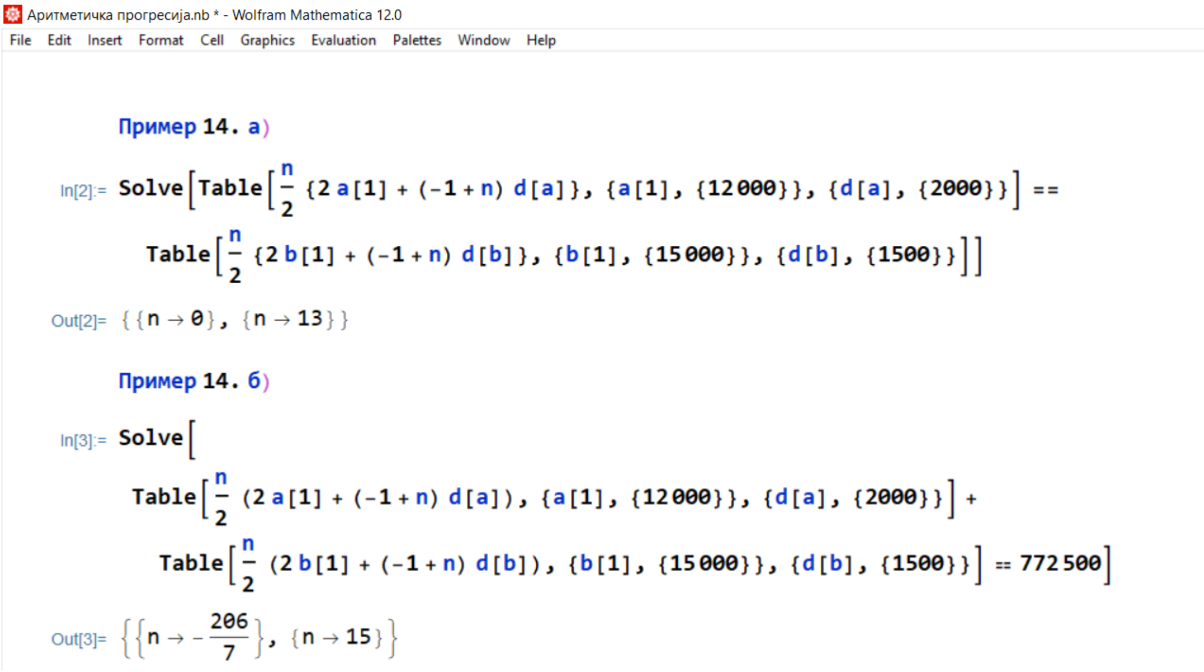
$$n_{1/2} = \frac{-101 \pm \sqrt{(101)^2 - 4\cdot 7\cdot(-3090)}}{2\cdot 7}$$

$$n_{1/2} = \frac{-101 \pm \sqrt{10201 + 86520}}{14}$$

$$n_{1/2} = \frac{-101 \pm \sqrt{96721}}{14} = \frac{-101 \pm 311}{14}$$

$$n_1 = \frac{-101 + 311}{14} = \frac{210}{14} = 15 \qquad n = 15 \text{ } е \text{ } решение$$

$$n_2 = \frac{-101 - 311}{14} = -\frac{412}{14} = -\frac{206}{7} \notin N \qquad не \text{ } е \text{ } решение$$



Слика 11. Решение на пример 4.3.11.

Пример 4.3.12. Туристичките места **“Х”** и **“Ш”** заклучно со **2010** година ги посетиле вкупно **2.530.500 туристи.** Секоја наредна во споредба со претходната година туристичкото место **“Х”** го посетувале **200 туристи помалку**, а туристичкото место **“Ш”, 500 туристи повеќе.** Да се пресмета:

а) за колку години туристичките места **“Х”** и **“Ш”** ги посетиле **2.530.500 туристи**, ако туристичкото место **“Х”** во последната година го посетиле **44.200 туристи**, а туристичкото место **“Ш”** во истиот период имало **44.500 туристи**, и

б) по колку туристи поединечно ги посетиле туристичките места **“Х”** и **“Ш”** за набљудуваниот период **?**

Решение:

$$a)\qquad a_n = 44200 \quad d_a = -200 \quad b_n = 44500 \quad d_b = 500$$

$$\underline{S_{n(A)} + S_{n(B)} = 2530500}$$

$$\frac{n}{2}[2a_n - (n-1)d_a] + \frac{n}{2}[2b_n - (n-1)d_b] = 2530500 / \cdot 2$$

$$n[2 \cdot 44200 - (n-1)(-200)] + n \cdot [2 \cdot 44500 - (n-1)500] = 5061000$$

$$88400n + 200n^2 - 200n + 89000n - 500n^2 + 500n = 5061000$$

$$-300n^2 + 177700n - 5061000 = 0 / : (-100)$$

$$3n^2 - 1777n + 50610 = 0 \qquad a = 3, \quad b = -1777, \quad c = 50610$$

$$n_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$n_{1/2} = \frac{1777 \pm \sqrt{(-1777)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 50610}}{2 \cdot 3}$$

$$n_{1/2} = \frac{1777 \pm \sqrt{3157729 - 607320}}{6}$$

$$n_{1/2} = \frac{1777 \pm \sqrt{2550409}}{6} = \frac{1777 \pm 1597}{6}$$

$$n_1 = \frac{1777 + 1597}{6} = \frac{3374}{6} = \frac{1687}{3} \notin N \qquad \text{не е решение}$$

$$n_2 = \frac{1777 - 1597}{6} = \frac{180}{6} = 30 \qquad n = 30 \text{ е решение}$$

$б)$ $a_n = 44200$ $d_a = -200$ $n = 30$ $S_{n(A)} = ?$

$$\underline{S_{n(A)}} = \frac{n}{2}[2a_n - (n-1)d_a]$$

$$S_{n(A)} = \frac{30}{2}[2 \cdot 44200 - (30-1)(-200)]$$

$$S_{n(A)} = \frac{30}{2}[88400 - 29(-200)]$$

$$S_{n(A)} = 15[88400 + 5800]$$

$$S_{n(A)} = 15 \cdot 94200 = 1413000$$

$$S_{n(A)} = 1413000 \; туристи$$

$b_n = 44500$ $d_a = 500$ $n = 30$ $S_{n(B)} = ?$

$$\underline{S_{n(B)}} = \frac{n}{2}[2b_n - (n-1)d_b]$$

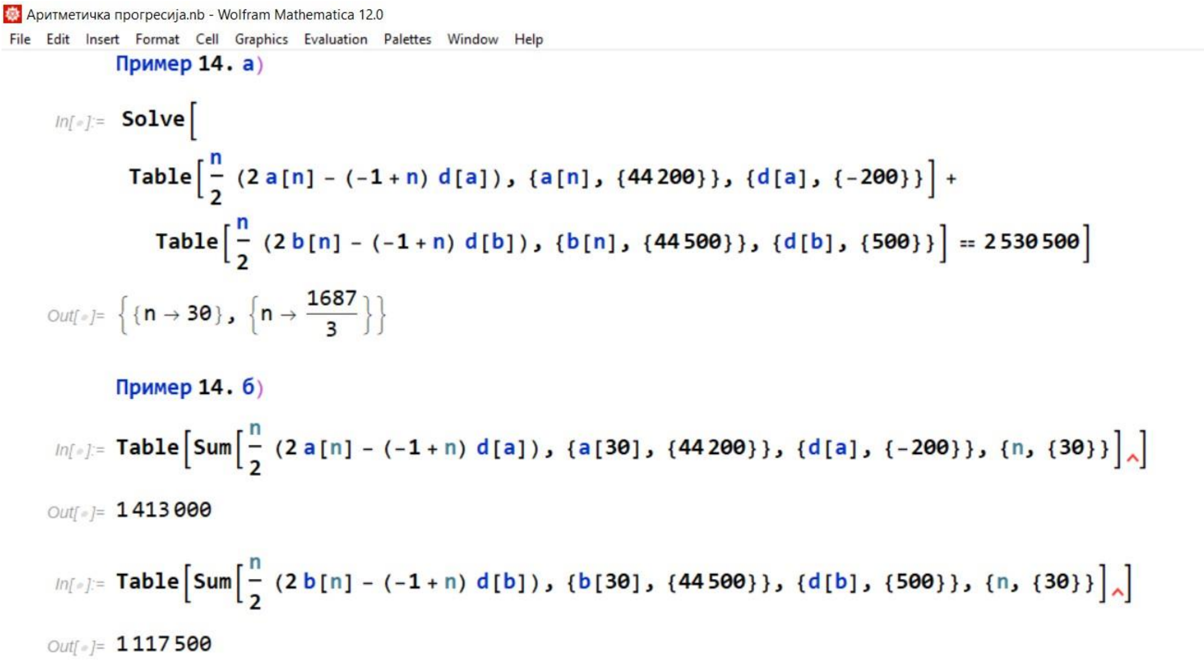
$$S_{n(B)} = \frac{30}{2}[2 \cdot 44500 - (30-1)200]$$

$$S_{n(A)} = \frac{30}{2}[89000 - 29 \cdot 500)] =$$

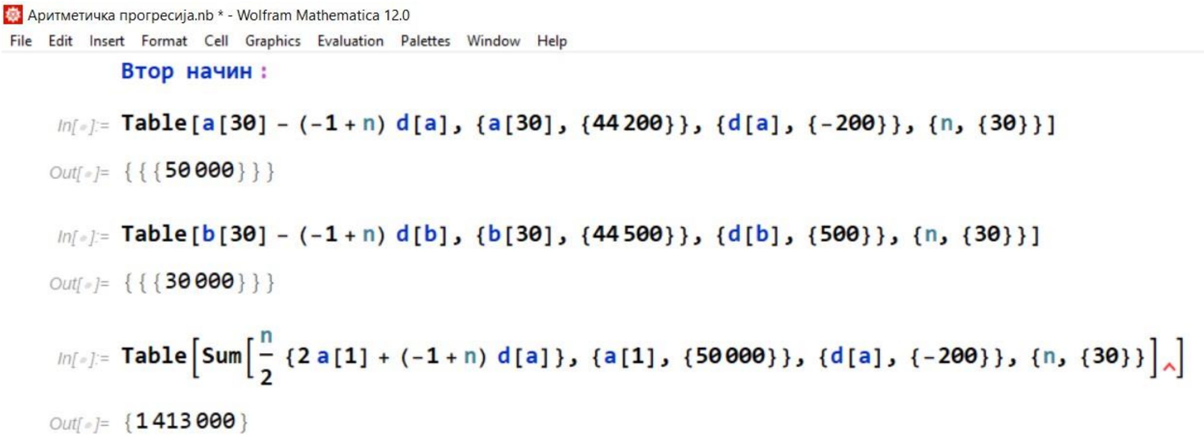
$$S_{n(A)} = 15[89000 - 14500]$$

$$S_{n(A)} = 15 \cdot 74500 = 1117500$$

$$S_{n(A)} = 1117500 \; туристи$$



Слика 12-1. Решение на пример 4.3.12.



Слика 12-2. Решение на пример 4.3.12.

Пример 4.3.13: Набавени се возила чија набавна вредност изнесува 20.000 денари и стапка на амортизација од 24%, работниот век е 5 години. Пресметајте ја амортизацијата според методот на опаѓачки вишок (метод на забрзана амортизација).

Решение:

$$S_t = \frac{t(a_1 + a_t)}{2}$$
$$S_t = 100$$

Каде што:

S - вкупен износ на % амортизација за t-години
a_1 - почетен процент
a_t - последен процент
$V_{poc} = 20000\ den$
Норма на амортизација- $a_1 = 24\%$

$$S_t = 100 \quad t = 5 \quad a_1 = 24, \quad a_2 = 22, \quad a_3 = 20, \quad a_4 = 18, \quad a_5 = 16$$

$$S_t = \frac{t(a_1 + a_t)}{2}$$

$$100 = \frac{5(24 + a_5)}{2}$$

$$200 = 5 \cdot 24 + 5 \cdot a_5$$

$$5a_5 = 200 - 120$$

$$a_5 = \frac{80}{5} = 16$$

$$d = \frac{a_t - a_1}{t - 1}$$

$$d = \frac{16 - 24}{5 - 1} = \frac{-8}{4} = -2$$

$$d = -2$$

```
Аритметичка прогресија.nb * - Wolfram Mathematica 12.0
File  Edit  Insert  Format  Cell  Graphics  Evaluation  Palettes  Window  Help

In[10]:= Solve[Table[n/2 {a[1] + a[5]}, {a[1], {24}}, {n, {5}}] == 100]

Out[10]= {{a[5] → 16}}

In[11]:= Table[{a[5] - a[1]} / {n - 1}, {a[1], {24}}, {a[5], {16}}, {n, {5}}]

Out[11]= {{{{-2}}}}

In[12]:= Table[a[1] + (-1 + n) d, {a[1], {24}}, {d, {-2}}, {n, 5}]

Out[12]= {{{24, 22, 20, 18, 16}}}
```

Слика 13. Решение на пример 4.3.13.

5.ГЕОМЕТРИСКА ПРОГРЕСИЈА

5.1. Дефиниција на геометриска прогресија

“Упорната работа победува сè”

/Aurelius/

Дефиниција 5.1.1. ([8]) Низата $a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n, ...$ во којашто количникот на било кој нејзин член, со исклучок на првиот, и неговиот претходник е еден ист се нарекува *геометриска низа*.

Бројот q се нарекува *количник* на геометриска низа.

Значи, геометриската прогресија е низа $\{a_n\}$ зададена со рекурентната формула

$$a_n = a_{n-1} \cdot q, \quad n = 2, 3, \dots \qquad (1)$$

каде што q е константа.

Ако $q > 1$ и $a_n > 0$, тогаш од (1) имаме $a_n = a_{n-1} \cdot q \Rightarrow a_n > a_{n-1}$, што покажува дека геометриската прогресија строго монотоно расте. Додека ако $0 < q < 1$ и $a_n > 0$, тогаш прогресијата строго монотоно опаѓа, т.е од (1) следи $a_n = a_{n-1} \cdot q \Rightarrow a_n < a_{n-1}$.

Општиот член a_n на геометрискат прогресија со количник q е

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}, \quad n \in N \qquad (2)$$

За доказот на (2) со помош на принцип на математичка индукција имаме:

За $n=1$, (2) е тривијално исполнета.

Нека (2) важи за секој $n \in N$ т.е. $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$. Тогаш за a_{n+1} од (1) и (2) добиваме $a_{n+1} = a_n \cdot q = a_1 q^{n-1} \cdot q = a_1 \cdot q = a_1 \cdot q^{(n+1)-1}$. Значи, (2) важи за секој $n \in N$.

Пример 5.1.1. Докажи со помош на принципот на математичката индукција дека за секој природен број $n \in N$ важи:

$$a_n = 8 - 3^n \quad \text{за} \quad n \geq 1$$

$$a_{n+1} = 8 - 3^{n+1}$$

$$a_{n+1} - a_n = 8 - 3^{n+1} - (\ 8 - 3^n\ )$$

$$a_{n+1} - a_n = 8 - 3 \cdot 3^n - 8 + 3^n$$

$$a_{n+1} - a_n = -3 \cdot 3^n + 3^n = (-3 + 1)\ 3^n$$

$$a_{n+1} - a_n = (-2)\ 3^n < 0 \quad \text{значи низата монотоно опаѓа}.$$

$$\text{Нека} \ a_n = 8 - 3^n \leq 5$$

1) $за \quad n = 1$

$$a_1 = 8 - 3^1 = 5$$

2) $за \quad n = k$ *претпоставуваме дека тврдењето е точно.*

$$a_k = 8 - 3^k \leq 5$$

3) $за \quad n = k + 1$

$$a_{k+1} = 8 - 3^{k+1} = 8 - 3 \cdot 3^k = \underbrace{8 - 3^k}_{5} - 2 \cdot 3^k = 5 - 2 \cdot 3^k < 5$$

$$\text{значи и} \quad a_{k+1} < 5$$

5.2. Својства на геометриска прогресија

Во продолжение се дадени неколку својства на геометриската прогресија и нивните докази.

1. Нека $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n, \ldots$ е геометриска прогресија. Тогаш, за секој $n \in N$, и за сите $k \in N,\ 1 \le k \le n$ важи

$$a_k \cdot a_{n-(k-1)} = a_1 \cdot a_n.$$

Доказ: Од (2) имаме $a_k = a_1 \cdot q^{k-1}$ и $a_{n-(k-1)} = a_1 \cdot q^{[n-(k-1)]-1} = a_1 \cdot q^{n-k}$. Така,

$$a_k \cdot a_{n-(k-1)} = a_1 \cdot q^{k-1} \cdot a_1 \cdot q^{n-k} = a_1 \cdot a_1 \cdot q^{n-1} = a_1 \cdot a_n,\ k = 1, 2, \ldots, n.$$

2. За кои било три последователни члена од една геометриска прогресија a_{n-1}, a_n, a_{n+1} важи:

$$a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}.$$

Доказ: Нека е дадена геометриската прогресија $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \ldots$. Од (1) имаме

$$a_{n-1} \cdot a_{n+1} = \frac{a_n}{q} \cdot q \cdot a_n = a_n{}^2 \text{ т.е. } a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}.$$

Значи, секој член од геометриска прогресија, со исклучок на првиот, е геометриска средина од неговите два соседни членови.

За природата на геометриската прогресија, во смисол на нејзина конвергенција – дивергенција, имаме:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_1 q^{n-1} = a_1 \lim_{n\to\infty} q^{n-1} \qquad (3)$$

што значи дека природата на геометриска низа зависи од количникот q.

Така,

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0 & за \quad -1 < q < 1 \\ 1 & за \quad q = 1 \\ +\infty & за \quad q > 1 \\ не\ постои & за \quad q \le -1 \end{cases} \qquad (4)$$

Од (3) и (4) имаме:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a_1 \lim_{n\to\infty} q^{n-1} = a_1 \cdot \begin{cases} 0 & за \quad -1 < q < 1 \\ 1 & за \quad q = 1 \\ +\infty & за \quad q > 1 \\ не \ постои & за \quad q \le -1 \end{cases} = \begin{cases} 0 & за \quad -1 < q < 1 \\ a_1 & за \quad q = 1 \\ \pm\infty & за \quad q > 1 \\ не \ постои & за \quad q \le -1 \end{cases}.$$

Следи:

Теорема 5.2.1. ([8]) Геометриска низа конвергира за $-1 < q \le 1$, а дивергира за $q \in (-\infty, -1] \cup (1, +\infty)$.

Својството 3 ја дава формулата за пресметување на збирот

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots a_{n-1} + a_n \tag{3}$$

на првите n - членови од една геометриска прогресија.

3. За збирот S_n на првите n - членови на геометриска прогресија $a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n, ...$ со прв член a_1 и количник q, $q \ne 1$ имаме

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Доказ: Од формулата за општиот член следи

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots a_{n-1} + a_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots a_1 q^{n-1}.$$

Множејќи го равенството $S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^{n-1}$ со q добиваме

$$qS_n = a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \dots a_1 q^n,$$

па од $qS_n - S_n = a_1 q^n - a_1$, т.е. $S_n = a_1 \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$.

5.3. Примена на геометриската прогресија во решавање проблеми од економијата со користење на Wolfram Mathematica

Пример 5.3.1. ([1]) Износот од **51 050 ден.** Да се подели на **10** лица, така да секое наредно добие двапати повеќе од претходното, колку ќе добие првото, а колку последното лице?

Решение:

$$S_n = 51150 \qquad q = 2 \qquad n = 10 \qquad a_1 = ? \qquad a_{10} = ?$$

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$51150 = a_1 \frac{2^{10} - 1}{2 - 1}$$

$$51150 = a_1 \frac{1024 - 1}{2 - 1}$$

$$51150 = 1023 a_1$$

$$a_1 = \frac{51150}{1023} = 50$$

$$a_1 = 50$$

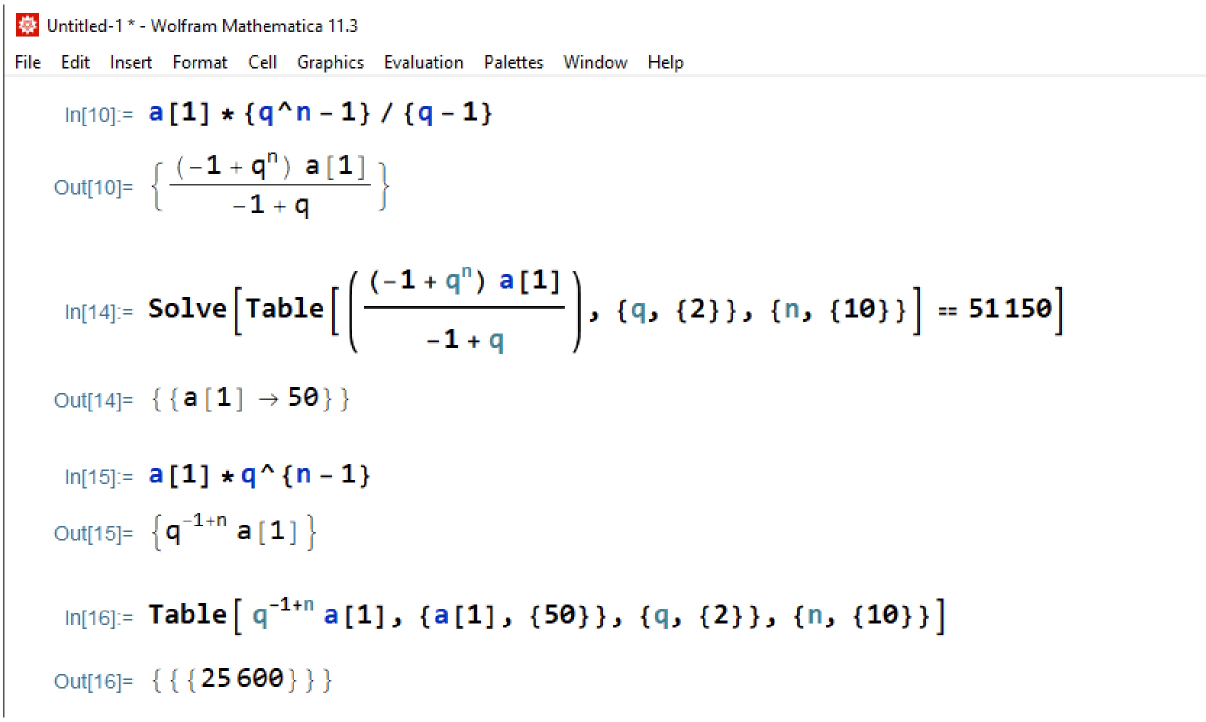
$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$a_{10} = 50 \cdot 2^{10-1}$$

$$a_{10} = 50 \cdot 2^9$$

$$a_{10} = 50 \cdot 512 = 25600$$

$$a_{10} = 25600$$



Слика 1. Решение на пример 5.3.1.

Пример 5.3.2. ([3]) Десет лица треба да поделат **48 156 $,** така што секое наредно лице да добие **5%** помалку во однос на претходното. Колку ќе добие првото, а колку последното лице?

$$S_n = 48156 \quad p = -5\% \quad n = 10 \quad a_1 = ? \quad a_{10} = ?$$

$$q = 1 + \frac{p}{100}$$

$$q = 1 - \frac{5}{100} = 0{,}95$$

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$48156 = a_1 \frac{0{,}95^{10} - 1}{0{,}95 - 1}$$

$$48156 = a_1 \frac{0{,}5987 - 1}{-0{,}05}$$

$$48156 = 8{,}026 a_1$$

$$a_1 = \frac{48156}{8{,}026} = 6000$$

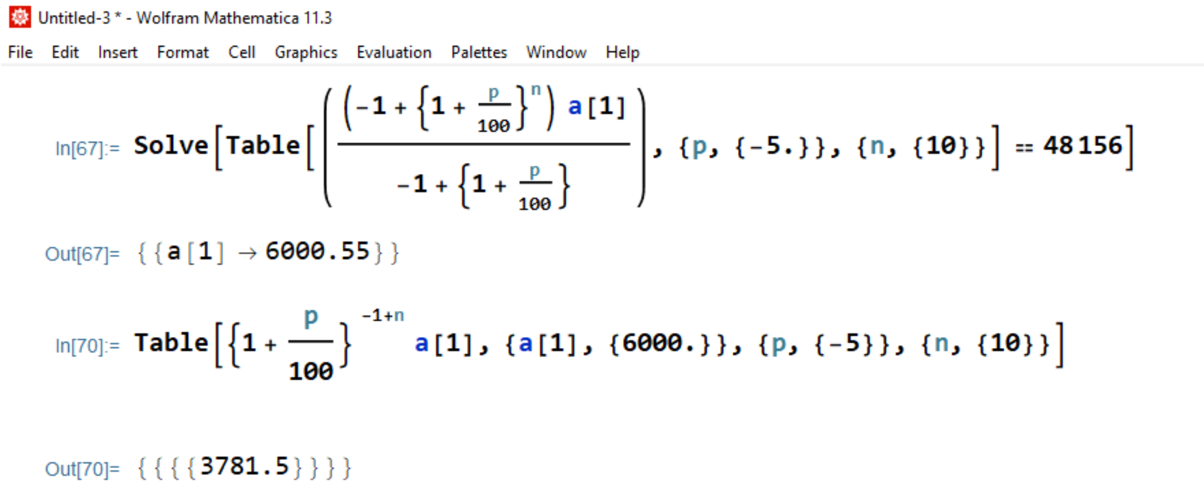
$$a_1 = 6000 \text{ ден.}$$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$a_{10} = 6000 \cdot 0{,}95^{10-1} = 6000 \cdot 0{,}95^9$$

$$a_{10} = 6000 \cdot 0{,}63025 = 3781{,}5$$

$$a_{10} = 3781{,}5 \,\$$$



Слика 2. Решение на пример 5.3.2.

Пример 5.3.3. ([3]) Една машина денес вреди **40 000 €.** Вредноста на машината на крајот од секој месец се намалува со **6%** од вредноста што била од почетокот на месецот. Колкава ќе биде вредноста на машината по две години ?

Решение:

$$a_1 = 40000 \qquad p = -6\% \qquad n = 24 \qquad a_{24} = ?$$

$$q = 1 + \frac{p}{100}$$

$$q = 1 - \frac{6}{100} = 0{,}94$$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$a_{24} = 40000 \cdot 0,94^{24-1}$$

$$a_{24} = 40000 \cdot 0,94^{23}$$

$$a_{24} = 40000 \cdot 0,24096 = 9638,3$$

$$a_{24} = 9638,3 \text{ } \textit{евра}$$

```
Untitled-3 * - Wolfram Mathematica 11.3
File  Edit  Insert  Format  Cell  Graphics  Evaluation  Palettes  Window  Help

In[72]:= Table[{1 + p/100}^(-1+n) a[1], {a[1], {40000.}}, {p, {-6}}, {n, {24}}]

Out[72]= {{{{9638.3}}}}
```

Слика 3. Решение на пример 5.3.3.

Пример 5.3.4. ([3]) Туристичката посета во едно туристичко место за време од **1 март до 31 август 2015 год.** постојано растела по принцип на геометриска прогресија. Разликата меѓу посетата во **јуни и април е 52800** посетители, а разликата меѓу **мај и април истата година е 24000** посетители.

Да се пресмета:

а) колкав е процентот на месечното зголемување на посетителите и колку посетители биле во **месец март 2015-година** и

б) колку вкупно го посетиле туристичкото место од **1 март до 31 август 2015 година?**

$$a)\ \begin{cases} a_4 - a_2 = 52800 \\ a_3 - a_2 = 24000 \end{cases} <=> \begin{cases} a_1q^3 - a_1q = 52800 \\ a_1q^2 - a_1q = 24000 \end{cases} <=> \begin{cases} a_1q(q^2 - 1) = 52800 \\ a_1q(q-1) = 24000 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{a_1q(q-1)(q+1)}{a_1q(q-1)} = \dfrac{52800}{24000} \end{cases} <=> \begin{cases} \dfrac{a_1q(q-1)(q+1)}{a_1q(q-1)} = \dfrac{11}{5} \end{cases}$$

$$q + 1 = 2,2 <=> q = 1,2$$

$$q = 1 + \frac{p}{100} <=> 1,2 = 1 + \frac{p}{100}$$

$$\frac{p}{100} = 0,2 <=> p = 20\%$$

$$a_1q(q-1) = 24000$$

$$a_1 \cdot 1,2(1,2-1) = 24000$$

$$a_1 \cdot 1,2 \cdot 0,2 = 24000$$

$$a_1 = \frac{24000}{0,24}$$

$$a_1 = \frac{2400000}{24}$$

$$a_1 = 100000$$

$б)$ $\qquad a_1 = 100000 \quad q = 1,2 \quad n = 6 \qquad S_6 = ?$

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

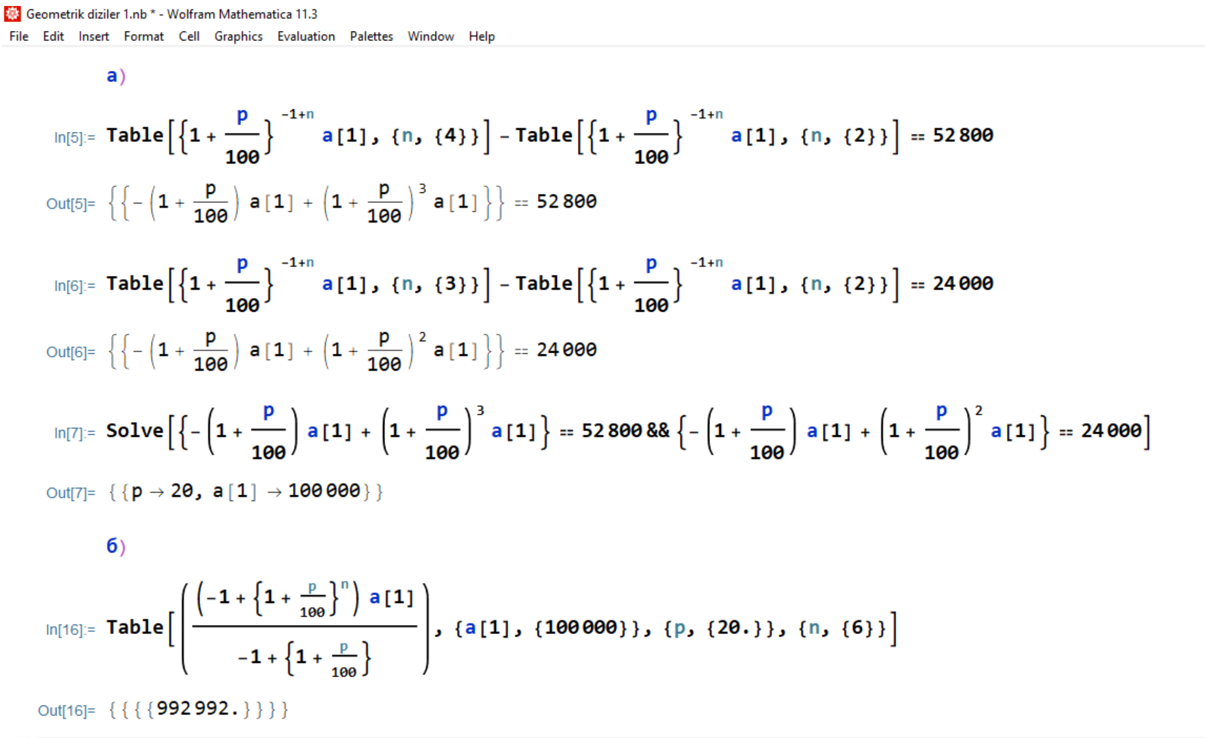
$$S_6 = 100000 \frac{1{,}2^6 - 1}{1{,}2 - 1}$$

$$S_6 = 100000 \cdot \frac{2{,}985984 - 1}{0{,}2}$$

$$S_6 = 100000 \cdot \frac{1{,}985984}{0{,}2}$$

$$S_6 = 100000 \cdot 9{,}92992$$

$$S_6 = 992992 \textit{ посетители}$$



Слика 4. Решение на пример 5.3.4.

Пример 5.3.5. ([3]) Фабриката **“ ШУКОМ ”** во **1995 год.** произвела **360000 кг.** од некој производ, а во **2005 год. 570000 кг**. Пресметај го просечното зголемување на производството?

Решение:

$$a_1 = 360000 \quad a_{11} = 570000 \quad n = 11 \qquad p = ?$$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$a_{11} = a_1 \cdot q^{11-1}$$

$$570000 = 360000 \cdot q^{10}$$

$$q^{10} = \frac{570000}{360000}$$

$$q^{10} = 1{,}58333 / \log$$

$$\log q^{10} = \log 1{,}58333$$

$$10 \log q = \log 1{,}58333$$

$$\log q = \frac{\log 1{,}58333}{10}$$

$$\log q = 0{,}019957235$$

$$q = 1{,}0470254$$

$$q = 1 + \frac{p}{100} <=> 1{,}0470254 = 1 + \frac{p}{100}$$

$$\frac{p}{100} = 0{,}0470254 <=> p = 4{,}70254\%$$

$$p = 4{,}70254\%$$

```
Untitled-2 * - Wolfram Mathematica 11.3
File  Edit  Insert  Format  Cell  Graphics  Evaluation  Palettes  Window  Help

In[∘]:= a[1] {q}^(-1+n)
Out[∘]= {q^(-1+n) a[1]}

In[∘]:= 1 + p/100
Out[∘]= 1 + p/100

In[∘]:= Solve[Table[{1 + p/100}^(-1+n) a[1], {a[1], {360000}}, {n, {11}}] == 570000.]
Out[∘]= {{p → -204.703}, {p → -184.706 - 61.5426 i}, {p → -184.706 + 61.5426 i},
  {p → -132.355 - 99.578 i}, {p → -132.355 + 99.578 i}, {p → -67.6451 - 99.578 i},
  {p → -67.6451 + 99.578 i}, {p → -15.2939 - 61.5426 i}, {p → -15.2939 + 61.5426 i}, {p → 4.70254}}
```

Слика 5. Решение на пример 5.3.5.

Пример 5.3.6. ([3]) Во месец јануари се произведени **1000 тони** од некој производ, во февруари **1050 тони** и во март **1102,5 тони.** Истиот однос на измена на производството е запазен и во наредните месеци. Да се пресмета:

а) во кој месец се произведени **1551.3 тони**,

б) производството во месец декември и

в) вкупното производство за цела година?

Решение:

$a)\qquad a_1 = 1000 \quad a_2 = 1050 \quad a_3 = 1102{,}5 \quad a_n = 1551{,}3 \quad n = ?$

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{1050}{1000} = 1{,}05 \qquad q = \frac{a_3}{a_2} = \frac{1102{,}5}{1050} = 1{,}05$$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$1000 \cdot 1{,}05^{n-1} = 1551{,}3$$

$$1{,}05^{n-1} = \frac{1551{,}3}{1000}$$

$$1{,}05^{n-1} = 1{,}5513 \, / \log$$

$$\log 1{,}05^{n-1} = \log 1{,}5513$$

$$(n-1)\log 1{,}05 = \log 1{,}5513$$

$$n-1 = \frac{\log 1{,}5513}{\log 1{,}05}$$

$$n-1 = \frac{0{,}190695792}{0{,}021189299}$$

$$n-1 = 8{,}99963$$

$$n = 8{,}99963 + 1 =$$

$$n = 9{,}99963$$

$$n \approx 10$$

$б)$ $$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$a_{12} = a_1 \cdot q^{12-1}$$

$$a_{12} = 1000 \cdot 1,05^{11}$$

$$a_{12} = 1000 \cdot 1,71033935$$

$$a_{12} = 1710,3 \;\; тони.$$

$в)$ $$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$S_{12} = 1000 \frac{1,05^{12} - 1}{1,05 - 1}$$

$$S_{12} = 1000 \frac{1,795856326 - 1}{0,05}$$

$$S_{12} = 1000 \cdot \frac{0,795856326}{0,05}$$

$$S_{12} = 1000 \cdot 15,9171$$

$$S_{12} = 15917,1 \quad тони.$$

Untitled-1 * - Wolfram Mathematica 11.3

File Edit Insert Format Cell Graphics Evaluation Palettes Window Help

а)

```
In[45]:= Log[q, {a[n] / a[1]}] + 1
```

$$\text{Out[45]= } \left\{1 + \frac{\text{Log}\left[\frac{a[n]}{a[1]}\right]}{\text{Log}[q]}\right\}$$

$$\text{In[46]:= Table}\left[1 + \frac{\text{Log}\left[\frac{a[n]}{a[1]}\right]}{\text{Log}[q]}, \{a[n], \{1551.3\}\}, \{a[1], \{1000\}\}, \{q, \{1.05\}\}\right]$$

```
Out[46]= {{{9.99963}}}
```

или

```
In[48]:= Table[Log[q, {a[n] / a[1]}] + 1, {a[n], {1551.3}}, {a[1], {1000}}, {q, {1.05}}]
Out[48]= {{{{9.99963}}}}
```

б)

$$\text{In[49]:= Table}\left[q^{-1+n}\, a[1], \{a[1], \{1000.\}\}, \{q, \{1.05\}\}, \{n, \{12\}\}\right]$$

```
Out[49]= {{{1710.34}}}
```

в)

$$\text{In[50]:= Solve}\left[\text{Table}\left[\left(\frac{(-1 + \{q\}^{n})\, a[1]}{-1 + \{q\}}\right), \{a[1], \{1000.\}\}, \{q, \{1.05\}\}, \{n, \{12\}\}\right]\right]$$

```
Out[50]= Solve[{{{{15917.1}}}}]
```

Слика 6. Решение на пример 5.3.6.

Пример 5.3.7. ([3]) Во еден маркет прометот во првиот месец заедно со прометот во третиот месец изнесува **15000000 ден.** А прометот во вториот месец заедно со прометот во четвртиот месец изнесува **30000000 ден**. Ако прометот се остварувал по принцип на геометриска прогресија, тогаш да се пресмета :

а) просечното месечно зголемување на прометот, колку изнесувал прометот во првиот месец и

б) вкупниот промет за првите шест месеци ?

Решение:

$$a)\ \begin{cases} a_1 + a_3 = 15000000 \\ a_2 + a_4 = 30000000 \end{cases} <=> \begin{cases} a_1 + a_1 q^2 = 15000000 \\ a_1 q + a_1 q^3 = 30000000 \end{cases} <=> \begin{cases} a_1(1+q^2) = 15000000 \\ a_1 q(1+q^2) = 30000000 \end{cases}$$

$$<=> \begin{cases} \dfrac{a_1 q(1+q^2)}{a_1(1+q^2)} = \dfrac{30000000}{15000000} \end{cases}$$

$$q = 2$$

$$a_1(1+q^2) = 15000000$$

$$a_1 \cdot (1+2^2) = 15000000$$

$$5a_1 = 15000000$$

$$a_1 = \frac{15000000}{5}$$

$$a_1 = 3000000\ \text{ден.}$$

$б)$

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$S_6 = 3000000 \frac{2^6 - 1}{2 - 1}$$

$$S_6 = 3000000 \cdot 63$$

$$S_6 = 189000000\ \text{ден.}$$

```
Untitled-1 * - Wolfram Mathematica 11.3
File  Edit  Insert  Format  Cell  Graphics  Evaluation  Palettes  Window  Help

a)

In[53]:= Solve[Table[q^(-1+n) a[1], {n, {1}}] + Table[q^(-1+n) a[1], {n, {3}}] == 15 000 000 &&
           Table[q^(-1+n) a[1], {n, {2}}] + Table[q^(-1+n) a[1], {n, {4}}] == 30 000 000]

Out[53]= {{q → 2, a[1] → 3 000 000}}

б)

In[54]:= Solve[Table[((-1 + {q}^n) a[1]) / (-1 + {q}), {a[1], {3 000 000}}, {q, {2}}, {n, {6}}]]

Out[54]= Solve[{{{{189 000 000}}}}]
```

Слика 7. Решение на пример 5.3.7.

Пример 5.3.8. ([1]) Во едно претпријатие трошоците на работењето во **месец јули** изнесувале **2.680, 2 ден.,** а во **декември 3.421 ден.** Ако трошоците на работењето се зголемувале по принцип на геометриска прогресија, тогаш да се пресмета:
а) просечната стапка на месечното зголемување на трошоците,
б) износот на вкупните трошоци во таа година и
в) во кој месец трошоците изнесувале **2.205 ден.?**

Решение:

$$a)\ \begin{cases} a_7 = 2680{,}2 \\ a_{12} = 3421 \end{cases} <=> \begin{cases} a_1 q^6 = 2680{,}2 \\ a_1 q^{11} = 3421 \end{cases} <=> \begin{cases} \dfrac{a_1 q^{11}}{a_1 q^6} = \dfrac{3421}{2680{,}2} \end{cases}$$

$$q^5 = 1{,}276397284$$

$$q = \sqrt[5]{1{,}276397284} \qquad a_1 q^6 = 2680{,}2$$

$$q = 1{,}05 \qquad 1{,}05^6\, a_1 = 2680{,}2$$

$$p = 100(q-1) \qquad a_1 = \frac{2680{,}2}{1{,}340095641}$$

$$p = 100(1{,}05-1) = 5\% \qquad a_1 = 2000$$

$$p = 5\%$$

$$б)\ S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$S_{12} = 2000 \frac{1{,}05^{12} - 1}{1{,}05 - 1}$$

$$S_{12} = 2000 \cdot \frac{1{,}795856326 - 1}{0{,}05}$$

$$S_{12} = 2000 \cdot \frac{0{,}795856326}{0{,}05}$$

$$S_{12} = 2000 \cdot 15{,}91712652$$

$$S_{12} = 31834{,}3\ ден.$$

в) $$a_n = a_1 q^{n-1}$$

$$1{,}05^{n-1} \cdot 2000 = 2205$$

$$1{,}05^{n-1} = \frac{2205}{2000}$$

$$1{,}05^{n-1} = 1{,}1025 / \log$$

$$(n-1)\log 1{,}05 = \log 1{,}1025$$

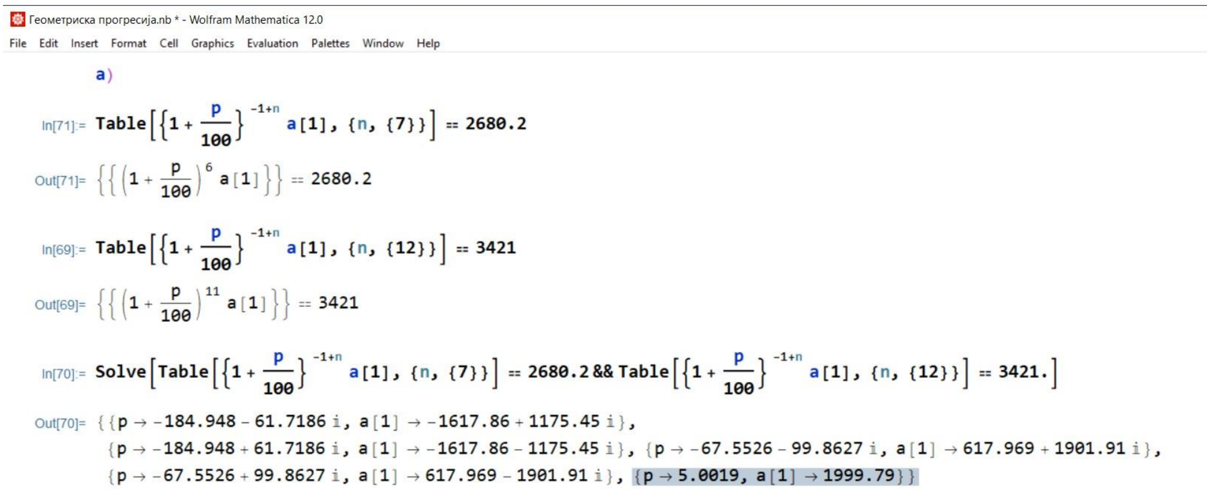
$$n-1 = \frac{\log 1{,}1025}{\log 1{,}05}$$

$$n-1 = \frac{0{,}042378598}{0{,}021189299}$$

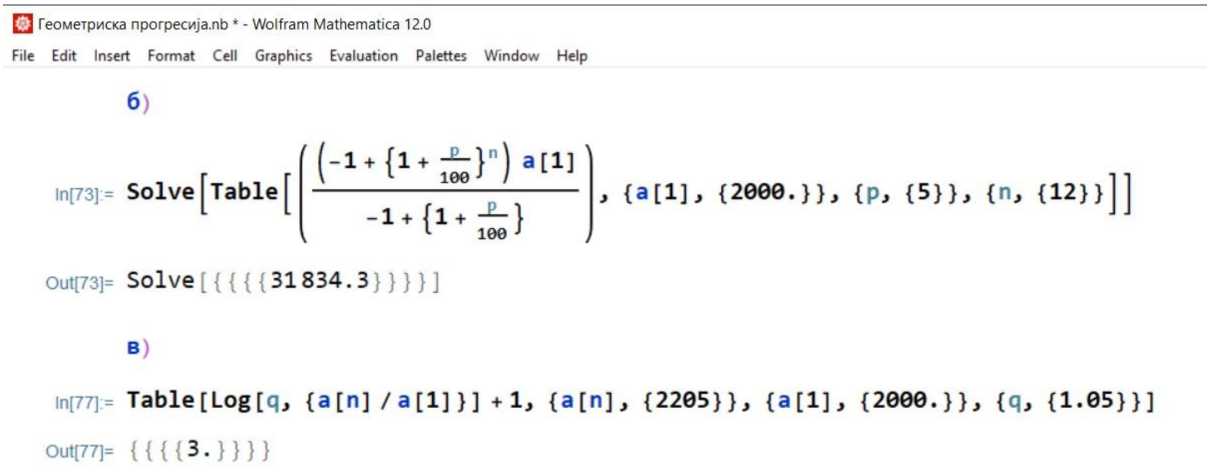
$$n-1 = 1{,}9999999$$

$$n = 1{,}9999999 + 1 \approx 3$$

$$n = 3$$



Слика 8-1. Решение на пример 5.3.8.



Слика 8-2. Решение на пример 5.3.8.

Пример 5.3.9. Во еден рудник во првиот ден се ископани **6000 т.,** руда, а во последниот ден од тој временски интервал **12.473,57 т.** руда и за ова време вкупно се ископани **141 944,95 т.** Ако производството сев одвивало по принцип на геометриска прогресија, да се пресмета:

а) стапката на пораст на производството и

б) за колку дена е ископано **141.944,95 тони?**

Решение:

$$a_1 = 6000 \qquad a_n = 12473{,}57 \qquad S_n = 141944{,}95 \qquad p = ? \qquad n = ?$$

$а)\qquad S_n = \dfrac{a_1 - q\,a_n}{1-q}$

$$141944{,}95 = \frac{6000 - 12473q}{1-q}$$

$$141944{,}95(1-q) = 6000 - 12473q$$

$$141944{,}95 - 141944{,}95q = 6000 - 12473q$$

$$129471{,}95q = 135944{,}95$$

$$q = \frac{135944{,}95}{129471{,}95}$$

$$q = 1{,}05$$

$$q = 1 + \frac{p}{100} \iff p = 100(q-1)$$

$$p = 100(1{,}05 - 1) = 5\%$$

$$p = 5\%$$

$в)\qquad a_n = a_1\,q^{n-1}$

$$12473{,}57 = 6000 \cdot 1{,}05^{n-1}$$

$$1{,}05^{n-1} = \frac{12473{,}57}{6000}$$

$$1{,}05^{n-1} = 2{,}07892833 /\ \log$$

$$(n-1)\log 1{,}05^{n-1} = \log 2{,}07892833$$

$$n-1 = \frac{\log 2{,}07892833}{\log 1{,}05}$$

$$n-1 = \frac{0{,}317839518}{0{,}021189299}$$

$$n-1 = 15 \iff n = 16$$

$$n = 16$$

Слика 9. Решение на пример 5.3.9.

Пример 5.3.10. а) Да се интерполираат четири члена во геометриската прогресија, ако првиот член е 5, а вториот член 1215?

Решение:

$$m = 4 \qquad a_1 = 5 \qquad a_2 = 1215$$

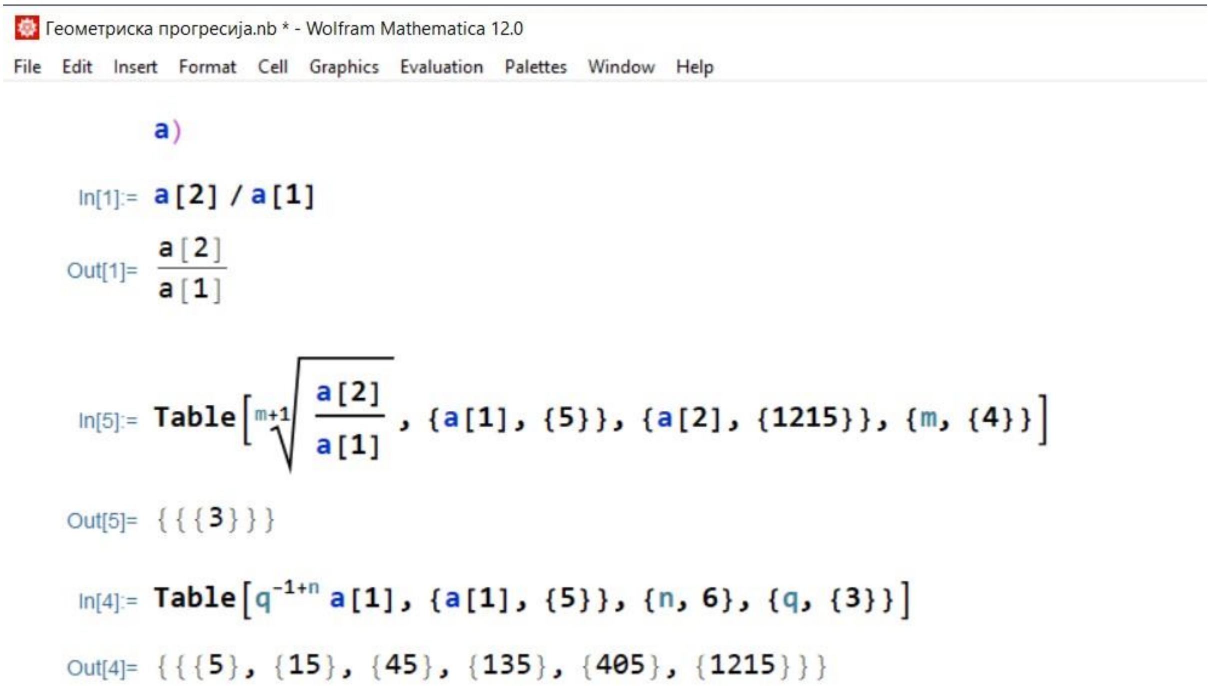
$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{1215}{5} = 243$$

$$q_1 = \sqrt[m+1]{q}$$

$$q_1 = \sqrt[4+1]{243} = \sqrt[5]{3^5}$$

$$q_1 = 3$$

$$\textit{Бараната низа е}: \{5,15,45,135,405,1215\}$$



Слика 10. Решение на пример 5.3.10-1.

б) Да се интерполираат пет члена во геометриската прогресија меѓу членовите **7** и **5103?**

$$m = 5 \qquad a_1 = 7 \qquad a_2 = 5103$$

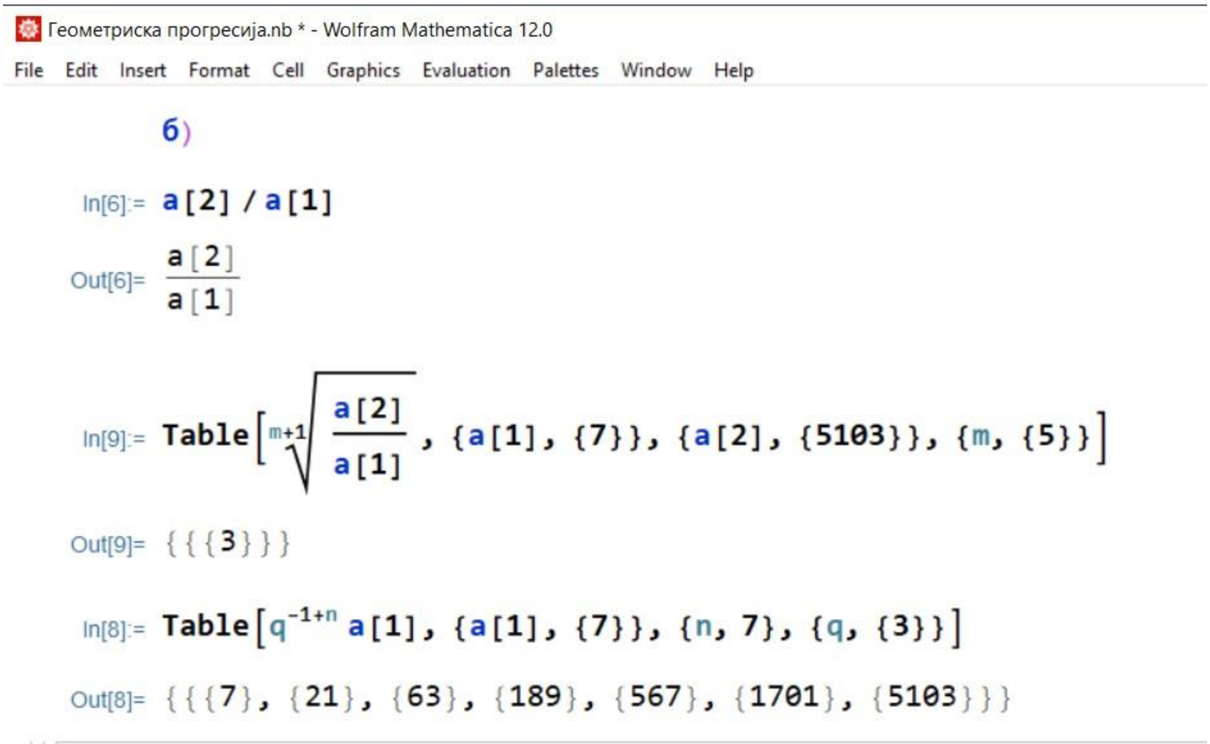
$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{5103}{7} = 729$$

$$q_1 = \sqrt[m+1]{q}$$

$$q_1 = \sqrt[5+1]{729} = \sqrt[6]{3^6}$$

$$q_1 = 3$$

$$\textit{Бараната низа е}: \{\, 3, 21, 63, 189, 567, 1701, 5103\}$$



Слика 10. Решение на пример 5.3.10-2.

Пример 5.3.11. ([3]) Сумата од **1.600.000 €**. треба да се подели на четири претпријатија (A , B , C , D), така што нивните делови претставуваат членови од една геометриска прогресија. Односот на разликата меѓу крајните членови спрема разликата од средните членови од таа прогресија се има како **13:3.** По колку ќе добие секое претпријатие**?**

Решение:

$$\begin{cases} (a_4 - a_1):(a_3 - a_2) = 13:3 \\ a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1600000 \end{cases} <=> \begin{cases} 13(a_3 - a_2) = 3(a_4 - a_1) \\ a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1600000 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 13(a_1q^2 - a_1q) = 3(a_1q^3 - a_1) \\ a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 = 1600000 \end{cases} <=> \begin{cases} 13a_1q^2 - 13a_1q = 3a_1q^3 - 3a_1 \\ a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 = 1600000 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a_1 - 13a_1q + 13a_1q^2 - 3a_1q^3 = 0 \\ a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 = 1600000 \end{cases} <=> \begin{cases} a_1(3 - 13q + 13q^2 - 3q^3) = 0 \\ a_1(1 + q + q^2 + q^3) = 1600000 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1[3(1 - q^3) - 13q(1 - q)] = 0 \\ a_1[(1+q) + q^2(1+q)] = 1600000 \end{cases} <=> \begin{cases} a_1[3(1-q)(1+q+q^2) - 13q(1-q)] = 0 \\ a_1(1+q)(1+q^2) = 1600000 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1(1-q)[3(1+q+q^2) - 13q] = 0 \\ a_1(1+q)(1+q^2) = 1600000 \end{cases} <=> \begin{cases} a_1(1-q)(3+3q+3q^2 - 13q) = 0 \,/:a_1 \\ a_1(1+q)(1+q^2) = 1600000 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1-q)(3q^2 - 10q + 3) = 0 \\ a_1(1+q)(1+q^2) = 1600000 \end{cases}$$

$3q^2 - 10q + 3 = 0$, $a = 3, b = -10, c = 3$

$$q_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$q_{1/2} = \frac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3}}{2 \cdot 3}$$

$$q_{1/2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{6}$$

$$q_{1/2} = \frac{10 \pm \sqrt{64}}{6} = \frac{10 \pm 8}{6}$$

$q_1 = 3 \qquad q_2 = \frac{1}{3}$

$$a_1(1+q)(1+q^2) = 1600000$$

$$q = 3$$

$$a_1(1+3)(1+9) = 1600000$$

$$a_1 = \frac{1600000}{40} = 40000$$

$$q = \frac{1}{3}$$

$$a_1(1 + \frac{1}{3})(1 + \frac{1}{9}) = 1600000$$

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{10}{9} a_1 = 1600000$$

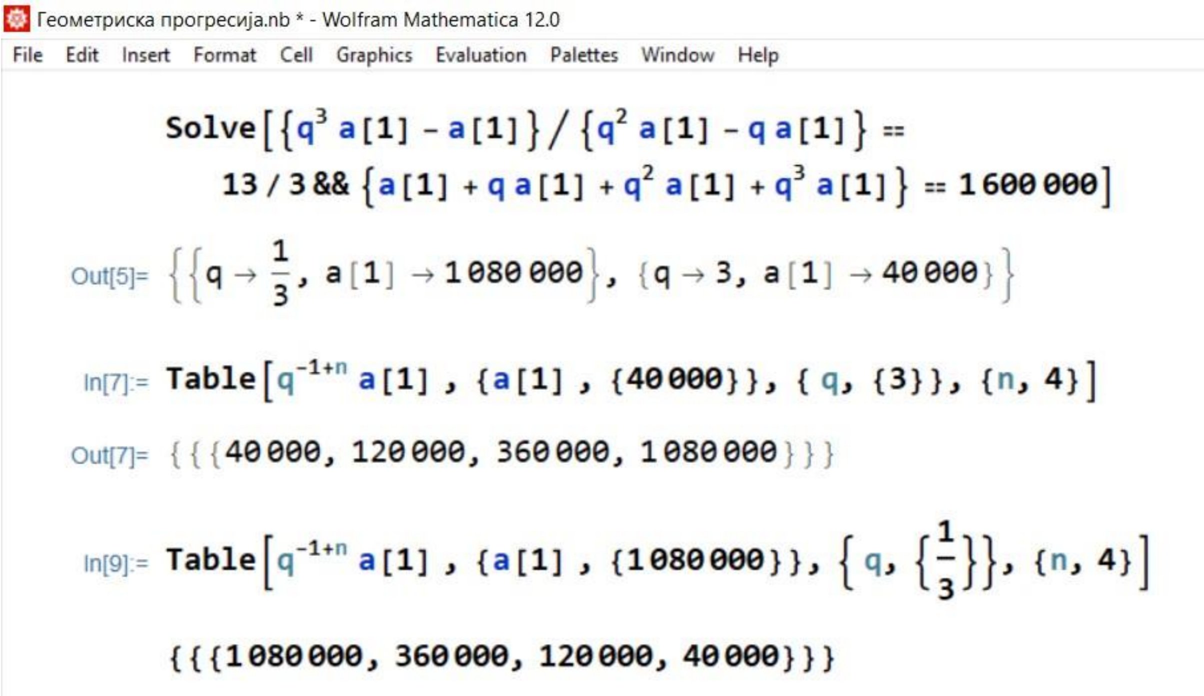
$$a_1 = 1600000 \cdot \frac{27}{40} = 1080000$$

$a_1 = 40000$ *Претпријатието* $A = 40000$

$a_2 = a_1 q = 40000 \cdot 3 = 120000$ *Претпријатието* $B = 120000$

$a_3 = a_1 q^2 = 40000 \cdot 3^2 = 360000$ *Претпријатието* $C = 360000$

$a_4 = a_1 q^3 = 40000 \cdot 27 = 1080000$ *Претпријатието* $D = 1080000$



Слика 11. Решение на пример 5.3.11.

Пример 5.3.12. ([1]) Извозот за некој производ, во последните три години изнесувал: **2001 год. 20.528, 76 кг.** Во **2002 год. 18.886, 46 кг.** и во **2003 год. 17.375, 54 кг.** Ако вкупниот извоз во анализираниот период изнесува **300.181, 31 кг.,** тогаш да се пресмета:
а) стапката на годишното намалување на извозот,
б) извозот во првата година,
в) во која година извозот изнесува **24.254, 2 кг**.,
г) за колку години се извезени **300.181, 31 кг.** и
д) вкупниот извоз за **15 години**

$$a_{n-2} = 20528{,}76 \qquad a_{n-1} = 18886{,}46 \qquad a_n = 17375{,}54$$

$$q = \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} = \frac{18886{,}46}{20528{,}76} = 0{,}92 \qquad\qquad q = \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{17375{,}54}{18886{,}46} = 0{,}92$$

$$a)\; q = 1 + \frac{p}{100} \iff p = 100(q-1) = 100(0{,}92-1) = -8\%$$

$б)$ $$S_n = \frac{a_1 - q\,a_n}{1-q}$$

$$300181{,}31 = \frac{a_1 - 0{,}92 \cdot 17375{,}54}{1-0{,}92}$$

$$300181{,}31(1-0{,}92) = a_1 - 15985{,}50$$

$$a_1 - 15985{,}50 = 24014{,}5$$

$$a_1 = 24014{,}5 + 15985{,}5 = 40000$$

$$a_1 = 40000$$

$в)$ $$a_n = a_1 q^{n-1}$$

$$242542{,}2 = 40000 \cdot 0{,}92^{n-1}$$

$$0{,}92^{n-1} = \frac{242542{,}2}{40000}$$

$$0{,}92^{n-1} = 0{,}60635 / \log$$

$$(n-1)\log 0{,}92 = \log 0{,}60635$$

$$n-1 = \frac{\log 0{,}60635}{\log 0{,}92} = 6$$

$$n = 7$$

г) $$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$300181{,}31 = 40000 \frac{0{,}92^n - 1}{0{,}92 - 1}$$

$$300181{,}31 \cdot (-0{,}08) = 40000 \cdot 0{,}92^n - 40000$$

$$40000 \cdot 0{,}92^n = 40000 - 24014{,}5048$$

$$0{,}92^n = \frac{15985{,}4952}{40000}$$

$$0{,}92^n = 0{,}39964 / \log$$

$$n \log 0{,}92 = \log 0{,}39964$$

$$n = \frac{\log 0{,}39964}{\log 0{,}92} = 11$$

$$n = 11 \quad \text{години.}$$

д) $$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$S_{15} = 40000 \frac{0{,}92^{15} - 1}{0{,}92 - 1}$$

$$S_{15} = 40000 \frac{0{,}2862974 - 1}{-0{,}08}$$

$$S_{15} = 40000 \frac{-0{,}713702595}{-0{,}08}$$

$$S_{15} = 40000 \cdot 8{,}921282449$$

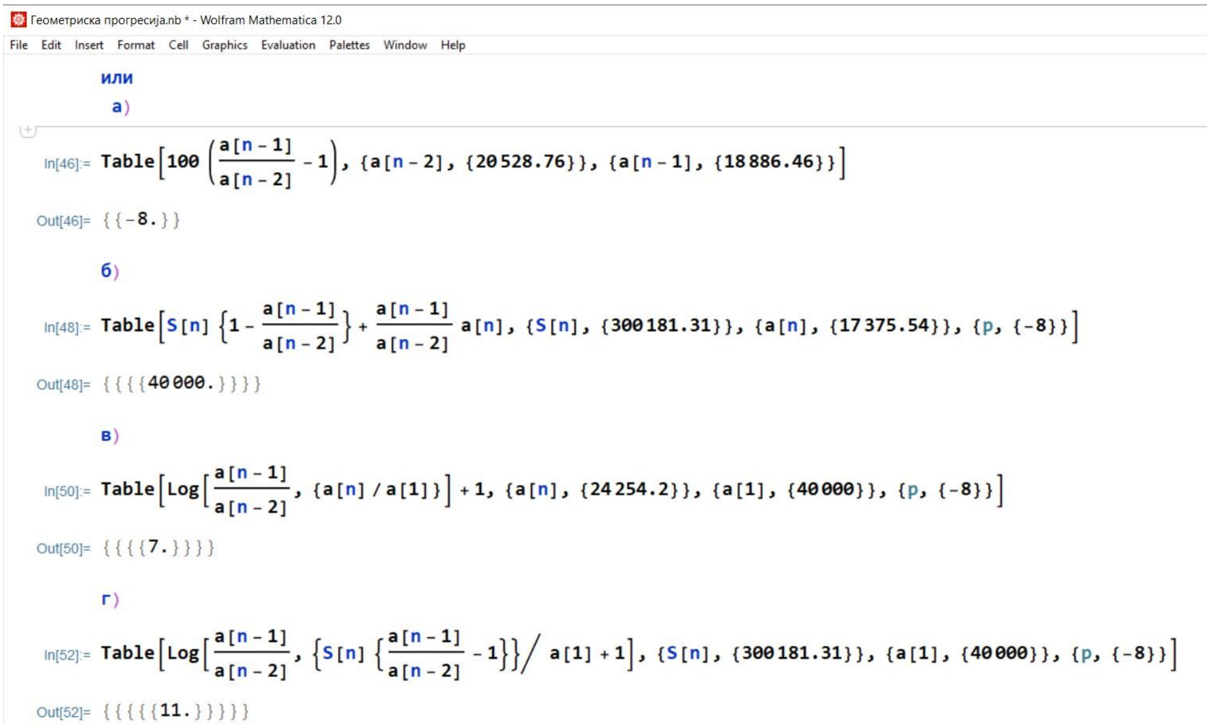
$$S_{15} = 356851{,}3 \ \text{килограми.}$$

```
Геометриска прогресија.nb * - Wolfram Mathematica 12.0
File  Edit  Insert  Format  Cell  Graphics  Evaluation  Palettes  Window  Help
        а)

In[24]:=
        Table[a[n - 1]/a[n - 2], {a[n - 2], {20528.76}}, {a[n - 1], {18886.46}}]

Out[24]= {{0.92}}

In[25]:= Table[a[n]/a[n - 1], {a[n - 1], {18886.46}}, {a[n], {17375.54}}]

Out[25]= {{0.92}}

In[26]:= Table[100 (a[n - 1]/a[n - 2] - 1), {a[n - 2], {20528.76}}, {a[n - 1], {18886.46}}]

Out[26]= {{-8.}}

        б)

In[32]:= Table[S[n] {1 - q} + q a[n], {S[n], {300181.31}}, {a[n], {17375.54}}, {q, {0.92}}]

Out[32]= {{{{40000.}}}}
```

Слика 12-1. Решение на пример 5.3.12.

```
Геометриска прогресија.nb * - Wolfram Mathematica 12.0
File  Edit  Insert  Format  Cell  Graphics  Evaluation  Palettes  Window  Help
        в)

In[33]:= Table[Log[q, {a[n] / a[1]}] + 1, {a[n], {24254.2}}, {a[1], {40000}}, {q, {0.92}}]

Out[33]= {{{{7.}}}}

        г)

In[34]:= Table[Log[q, {S[n] {q - 1}} / a[1] + 1], {S[n], {300181.31}}, {a[1], {40000}}, {q, {0.92}}]

Out[34]= {{{{{11.}}}}}

        д)

In[35]:= Solve[Table[(((-1 + {q}^n) a[1])/(-1 + {q})), {a[1], {40000}}, {q, {0.92}}, {n, {15}}]]

Out[35]= Solve[{{{{356851.}}}}]
```

Слика 12-2. Решение на пример 5.3.12.



Слика 12-3. Решение на пример 5.3.12.

6. Заклучок

Во овој труд беше применето апликативниот софтвер ***Wolfram Mathematica***, при решавање на задачи од аритметичката и геометриската прогресија од областа на економијата. Откако истите претходно беа решени по аналитички пат, решенијата беа споредени и потврдени преку апликативниот софтвер ***Wolfram Mathematica***, со помош на кодови и алгоритми составени за решавање на задачи од оваа област.

При решавање беа составени нови алгоритми за дефинирање на општиот член на аритметичката прогресија, алгоритам за дефинирање на збирот на n- елементи, алгоритам за формирање на систем од линеарни равенки со две променливи (првиот член a_1 и диференцијата d) на аритметичката прогресија. Алгоритам за интерполирање (вметнување) на членови помеѓу два члена од аритметичката прогресија. Исто така при решавање беа користени нови алгоритми за дефинирање на општиот член на геометриската прогресија, алгоритам за дефинирање на збирот на n-елементи, алгоритам за формирање на систем од равенки со две променливи (првиот член a_1 и количникот q) на геометриската прогресија. Алгоритам за интерполирање (вметнување) на членови помеѓу два члена од геометриската прогресија во апликативниот софтвер ***Wolfram Mathematica*** кои би требале да бидат од голема корист за идните генерации на студенти од економијата.

Овој труд отвара пат за примена на овие кодови во други апликативни софтвери, при решавање на задачи од аритметичката и геометриската прогресија од областа на економијата.

7. Користена литература

[1] Драге Јанев, *Основи на економската математика*, Скопје, 2015.

[2] Силвана Петрушева, Ѓорѓи Маркоски, Дание Велинов, *Математика, II дел, Скопје, 2017.*

[3] Илија Јанев, Јован Илиевски, *Применета математика за економисти*, Скопје, 2016.

[4] Ристо Малчески, *Математичка анализа I*, Скопје, 2019.

[5] Никита Шекутковски, *Математичка анализа*, Скопје, 2008.

[6] Лазо А. Димов, *Математика – 1*, Скопје, 2006.

[7] Kristaq Filipi, Azir Jusufi, Xhevair Beqiri, *Matematika për ekonomistë*, Tetovë, 2012.

[8] Борко Илиевски, *Математика I*, Скопје, 2011.

[9] Faton M.Berisha, Muharrem Q. Berisha, *Matematikë për biznes dhe ekonomikës*,

[10] Драган Димитровски, Весна Манова- Ераковиќ, Ѓорѓи Маркоски, *Математика 1*, Скопје, 2015.

[11] Azir Jusufi, Xhevair Beqiri, *Përmbledhje detyrash nga matematika për ekonomistë*, Tetovë, 2013.

[12] Dragan Vugdelija, Otilija Sedlak. (2008), FINANSIJSKA I AKTUARSKA MATEMATIKA

[13] Бранко Трпеновски, Наум Целакоски, Ѓорѓи Чупона, *Виша Математика*, Скопје, 1995.

[14] İstanbul İşletme Enstitüsü, link: www.iienstitu.com [online accessed on 27.08.2020]

[15] Anadolu Üniversitesi, link: https://docplayer.biz.tr/5514879-Matematiksel-iktisat.html [online accessed on 29.08.2020]

[16] Wolfram mathematica, link: https://reference.wolfram.com/language/tutorial/FunctionalOperations.html#32145 [online accessed on 27.08.2020]

[17] Özel yıldızlar lisesi link: http://yildizlaranadolu.com/wp-content/uploads/2019/04/41-Aritmetik-ve-Geometrik-Diziler.pdf [online accessed on 23.08.2020]

[18] Maja Durinski Nizovi realnih brojeva i primjene, link: http://www.mathos.unios.hr/~mdjumic/uploads/diplomski/%c4%90UR78.pdf [online accessed on 25.08.2020]

[19] E-matematika,link: http://www.e-matematika.mk/ [online accessed on 03.09.2020]

[20] Mathcentre, link: http://www.mathcentre.ac.uk/resources/uploaded/mc-ty-apgp-2009-1.pdf [online accessed on 11.09.2020]

[21] Varsitytutors, link: https://www.varsitytutors.com/hotmath/hotmath_help/topics/sum-of-the-first-n-terms-of-a-geometric-sequence [online accessed on 16.09.2020]

[22] Makprint,link: https://www.eucebnici.mon.gov.mk/pdf/179_Matematika%20za%20ekonomisti%20za%203_MAK_PRINT.pdf [online accessed on 19.09.2020]

[23] Anadolu Üniversitesi, link: https://www.anadolu.edu.tr/en/academics/faculties/course/83600/matematiksel-iktisat/content [online accessed on 22.09.2020]

[24] Wolfram mathematica, link: https://www.wolfram.com [online accessed on 25.09.2020]