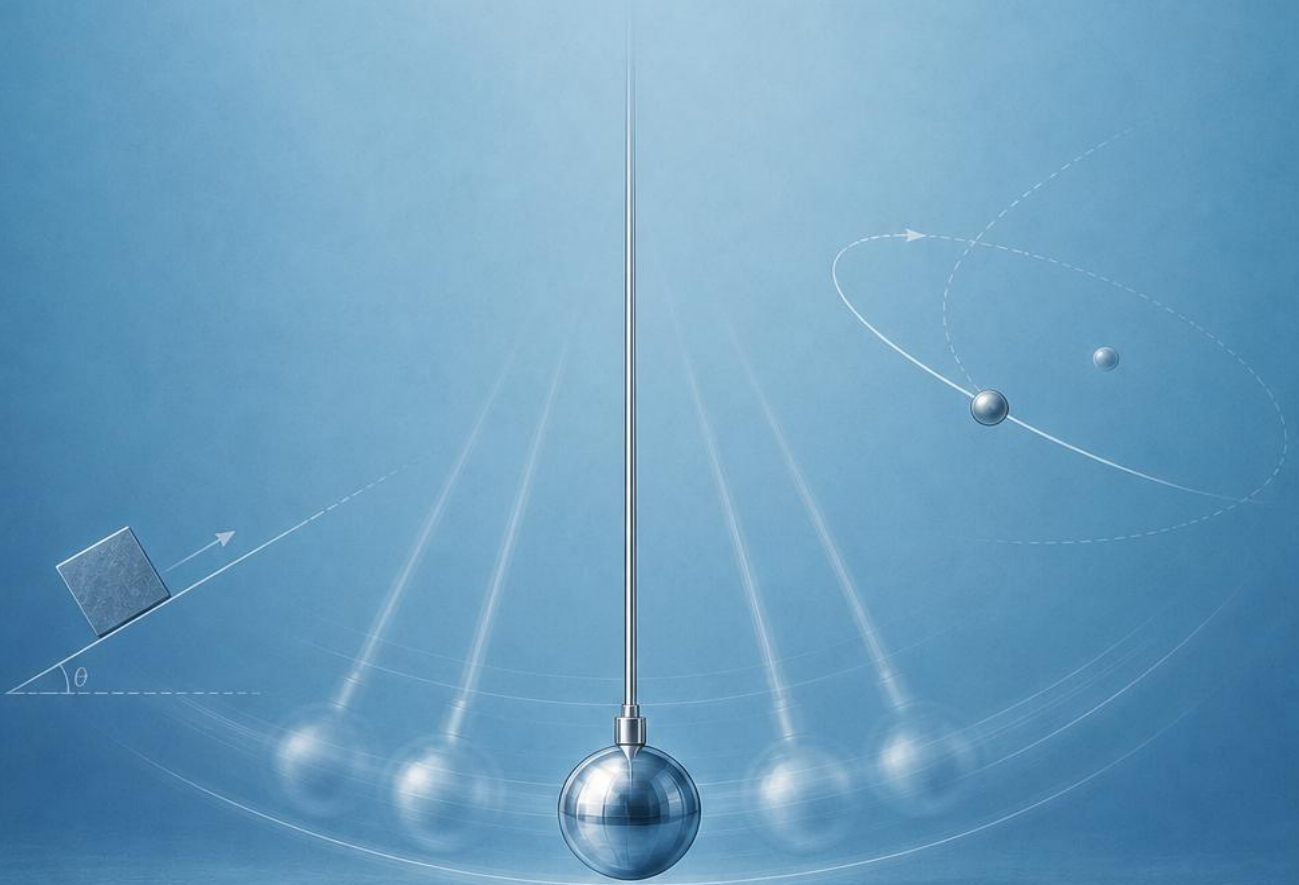


УНИВЕРЗИТЕТ МАЈКА ТЕРЕЗА
ФАКУЛТЕТ ЗА ТЕХНИЧКИ НАУКИ

д-р ЗЛАТКО НЕДЕЛКОСКИ

ОПШТА ФИЗИКА

1



Скопје, 2026

Уредник на публикацијата:

д-р Златко Неделкоски

Рецезенти:

проф. д-р Александар Скепаровски

Природно-Математички Факултет, УКИМ, Скопје

проф. д-р Боце Митревски

Природно-Математички Факултет, УКИМ, Скопје

Техничка обработка:

д-р Златко Неделкоски

Лектор:

Даниела Мацова

ПРЕДГОВОР

Во оваа книга се презентирани основите на механика, како воведен материјал неопходен за анализа на движењата на системи од интерес. Практичната примена на презентираната теорија е илустрирана преку голем број на решени задачи. Презентираните методи ги опфаќаат сите три агрегатни состојби, цврсти тела, течности, и гасови, со цел да се добие сеопфатна слика за практичната важност на механиката за карактеризација на процесите од молекуларно до макроскопско ниво.

Во првите поглавја, презентирани се основните концепти од кинематика и динамика на движење на материјална точка, вклучувајќи објаснување на најчесто користените координатни системи во механиката за разни видови на геометрии, равенки на движење во една или повеќе димензии, поимот за релативна брзина, карактеристичните величини кои го опишуваат движењето по кружна патека, Њутновите закони како основен метод за решавање на голем број на практични задачи, и силите кои најчесто се присутни во механички системи. Објаснета е и Кориолисовата сила, како псевдо-сила која се појавува поради изборот на неинерцијален ротирачки систем.

Релациите помеѓу работата и енергијата за материјална точка како и за системи од многу честички се презентирани заедно со поимот за импулс како основа на принципите за константност на енергијата и импулсот во изолирани системи во отсуство на надворешни влијанија, кои често се користат за карактеризација на системи каде, поради непознавање на силите или присуството на голем број на честички од кои е составен системот, класичниот метод базиран на решавање на вториот Њутнов закон не е практично применлив.

Презентирани се и основните методи за карактеризација на ротација на тврди тела преку величините момент на инерција, момент на сила, и момент на импулс, како и концептот за центар на маса, кој е суштински

за разложување на движењето на две компоненти, едната на центарот на маса, и втората која го опишува релативното движење на цврстото тело во однос на центарот на маса, што е особено важно при анализа на комплексни системи составени од повеќе објекти.

Основните карактеристики на осцилаторни процеси се презентирани поради нивната присутност насекаде во природата, од макроскопско до атомско ниво, во сите агрегатни состојби на материјата. Поимот за хармониски осцилации за една честичка како и за системи од повеќе честички во изолирани системи како и во системи со сили на отпор или надворешна периодична екситација е објаснет како основа на многу процеси од различна природа во класичната и квантната физика.

Презентираните методи на механиката се искористени за анализа на движењата во гравитациско поле и изведување на Кеплеровите закони кои се суштински во астрономијата. Покрај анализата на цврсти објекти, презентирани се и основите на механиката на флуиди, вклучувајќи го поимот за Архимедова сила, Бернулиевата равенка за корелација помеѓу притисокот и брзината на флуидите, вискозноста, како и ефектите на површински напон и капиларност кои се од голема важност и во многу процеси во биолошки организми. Дополнително, презентирани се и основите на молекуларно-кинетичката теорија на идеални гасови како статистички системи од огромен број на молекули. Покажани се директните корелации помеѓу макроскопските величини и карактеристиките на молекуларното движење во идеален гас. Изведени се дистрибуциите на молекулите по брзини и координати како специјален случај на генералната дистрибуција по енергија во фазниот простор на статистички системи. Брауновото движење е објаснето како директна демонстрација на атомската/молекуларната теорија на материјата.

СОДРЖИНА

1. ФИЗИЧКИ ВЕЛИЧИНИ И ЕДИНИЦИ	8
2. КИНЕМАТИКА НА ТРАНСЛАТОРНО ДВИЖЕЊЕ	11
2.1 Декартов координатен систем	11
2.2 Цилиндрични и сферни координатни системи	12
2.3 Движење во една димензија	15
2.4 Релативна брзина	23
2.5 Движење со забрзување	25
2.6 Движење по кружна патека	33
3. ДИНАМИКА	42
3.1 Њутнови закони	42
3.2 Сили во механика	44
3.3 Кориолисова сила	47
4. РАБОТА, ЕНЕРГИЈА, И ИМПУЛС	58
4.1 Работа и енергија	58
4.2 Системи од многу честички	75
4.3 Импулс	77
5. РОТАЦИОНО ДВИЖЕЊЕ	89
5.1 Момент на инерција	89
5.2 Момент на сила	96

5.3 Момент на импулс	103
5.4 Прецесија	110
6. ОСЦИЛАЦИИ	112
6.1 Хармониски осцилатор	112
6.2 Двочестичен осцилатор	116
6.3 Осцилации на две спрегнати маси	117
6.4 Лонгитудинални осцилации на систем од N маси	121
6.5 Математичко нишало	122
6.6 Физичко нишало	125
6.7 Пригушен осцилатор	130
6.8 Присилени осцилации	132
7. ДВИЖЕЊЕ ВО ГРАВИТАЦИСКО ПОЛЕ	135
7.1 Гравитациска сила	135
7.2 Експеримент на Кевендиш	135
7.3 Потенцијална енергија	138
7.4 Орбитално движење во гравитациско поле	144
7.5 Кеплерови закони	148
7.6 Движење по кружна патека	151
8. ФЛУИДИ	157
8.1 Вовед	157
8.2 Паскалов принцип	162
8.3 Архимедова сила	164
8.4 Бернулиева равенка	167

8.5 Вискозност	172
8.6 Ламинарност и турбулентност	176
8.7 Површински напон	177
8.8 Контактен агол	182
8.9 Капиларност	183
9. ОСНОВИ НА МОЛЕКУЛАРНО-КИНЕТИЧКА ТЕОРИЈА НА ИДЕАЛНИ ГАСОВИ	188
9.1 Вовед	188
9.2 Максвелова дистрибуција на брзината	191
9.3 Болцманова функција на распределба	198
9.4 Должината на среден слободен пат	202
9.5 Молекули со повеќе степени на слобода	203
9.6 Специфични топлински капацитети на идеален гас при константен волумен и константен притисок	206
9.7 Адијабатски процес	208
9.8 Бранови во идеален гас	209
9.9 Брауново движење	213

1. ФИЗИЧКИ ВЕЛИЧИНИ И ЕДИНИЦИ

Помеѓу големиот број физички величини, карактеристични се седум од нив, наречени основни физички величини, прикажани во **Табела 1.1**.

Табела 1.1. Основни величини и единици.

Величина	Единица [ознака]
Должина	Метар [m]
Маса	Килограм [kg]
Време	Секунда [s]
Јачина на електрична струја	Ампер [A]
Термодинамичка температура	Келвин [K]
Количество на супстанца	Мол [mol]
Јачина на светлина	Кандела [cd]

Овие величини се наречени основни поради тоа што преку нив може да се изразат сите останати физички величини, кои, според тоа, се наречени изведени физички величини. Пример за изведена физичка величина е брзината, добиена со делење на две основни, должина и време.

Најчесто користени основни физички величини во механика, делот од физика во кој генерално се проучува движење на објекти, се должина, маса, и време. Основните единици за овие величини се дефинирани преку фундаментални процеси.

На пример, еден метар е дефиниран како должина на растојанието кое го поминува светлината во вакуум за време од $1/299,792,458$ s. Вредноста во именителот е брзината на светлината во вакуум. Според ова, единицата за должина е дефинирана преку фундаментален процес, т.е., простирање на светлина.

Единицата за време, една секунда, е дефинирана со цезиумов атомски часовник. Дефиницијата се базира на фреквенцијата на микробрановата спектрална линија емитирана од атоми на изотопот на металот цезиум ^{133}Cs . Една секунда е дефинирана како 9,192,631,770 периоди на оваа спектрална линија.

Единицата за маса, еден килограм, до 2019та беше дефинирана како масата на цилиндар (стандард) изработен од платина–иридиум, чуван под специјални услови во Меѓународното Биро за Тегови и Мерки во близина на Париз.

Согласно новата дефиниција, 1 kg е маса која резултира во вредност на Планковата константна од $6.62607015 \times 10^{-34}$ кога е изразена во единица $\text{J s} = \text{kg m}^2 \text{s}^{-1}$. Предност на новата дефиниција е што масата е дефинирана преку фундаментални физички константи (Планкова константа, брзина на светлина, и фреквенцијата на спектралната линија на цезиум).

Вредностите кои ги мериме или анализираме многу често се многу помали или многу поголеми од основната единица. На пример, во нанофизиката, должините типично се од ред на величина нанометар (1/1,000,000,000 дел од метар), додека во астрономијата анализираме вредности кои се многу поголеми од метар со оглед на растојанијата помеѓу објектите во универзумот. Според ова, практично е да се дефинираат префикси за изразување на многу помали или многу поголеми вредности од основната, како што е прикажано во **Табела 1.2**. Во заградите се прикажани скратените ознаки за овие префикси.

Табела 1.2. Префикси на единици и нивните вредности.

Префикс	Вредност	Префикс	Вредност
пико (p)	10^{-12}	тера (T)	10^{12}
нано (n)	10^{-9}	гига (G)	10^9
микро (μ)	10^{-6}	мега (M)	10^6
мили (m)	10^{-3}	кило (k)	10^3

Пример 1.1. Конвертирај 2.3 ps во ns.

Оваа задача ќе ја решиме во два чекори. Прво ќе ја конвертираме вредноста во секунди. Потоа, таа вредност ќе ја конвертираме во ns.

$$2.3 \text{ ps} = 2.3 \times 10^{-12} \text{ s} = 2.3 \times 10^{-12} \times 10^9 \text{ ns} = 2.3 \times 10^{-3} \text{ ns}.$$

Пример 1.2. Конвертирај ја брзината 72 km/h во m/s.

Оваа задача ќе ја решиме со конверзија на единицата километар во метар и единицата час во основната единица секунда.

$$72 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 72 \frac{1000 \text{ m}}{60 \times 60 \text{ s}} = \frac{72 \text{ m}}{3.6 \text{ s}} = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

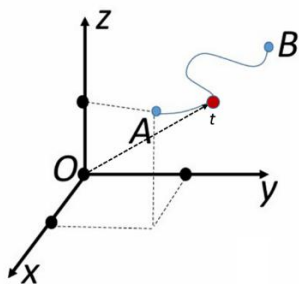
2. КИНЕМАТИКА НА ТРАНСЛАТОРНО ДВИЖЕЊЕ

2.1 Декартов координатен систем

За да го опишеме движењето на објект, користиме координатни системи, најчесто Декартов, прикажан во **Фигура 2.1**. Овој координатен систем е три-димензионален со взаемно-нормални оски x , y , и z и координатен почеток во точка O . Во фигурата е прикажан објект (точка) кој се движи долж сината патека (траекторија). Во временски момент t_1 , објектот е во позиција A , додека во временски момент t_2 објектот е во позиција B . Положбата на објектот може да се изрази преку векторот на положба дефиниран со трите координати x , y , и z кои зависат од временскиот момент t :

$$\mathbf{r} = x(t), y(t), z(t).$$

Во фигурата, моменталната положба на објектот во временски момент t е означена со црвената точка, а векторот на положба во тој временски момент е прикажан со испрекинатата линија која почнува од координатниот почеток.



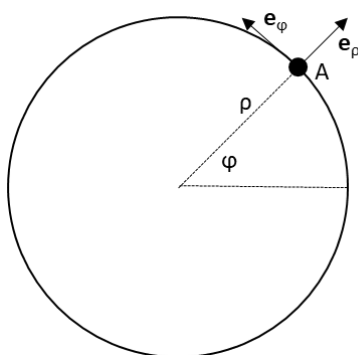
Фигура 2.1. Траекторија на движење во однос на координатен систем $oXYZ$.

Координатите $x(t), y(t), z(t)$ на објектот се определуваат со помош на нормални проекции на соодветните оски, како што е прикажано на

фигурата. Должините на отсечките од координатниот почеток до црните точки за секоја оска ги дефинираат трите координати на објектот во овој Декартов координатен систем.

2.2 Цилиндрични и сферни координатни системи

Решавањето на многу практични проблеми со цилиндрична или сферна геометрија е значително поедноставно со користење на цилиндрични или сферни ортогонални координатни системи.



Фигура 2.2. Цилиндричен координатен систем. Единичниот вектор e_z е нормален на e_ρ и e_ϕ (не е прикажан).

Векторот на положба за материјалната точка A во цилиндричен координатен систем може да се претстави како

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = \rho\cos\phi\mathbf{i} + \rho\sin\phi\mathbf{j} + z\mathbf{k} = \rho\mathbf{e}_\rho + z\mathbf{e}_z,$$

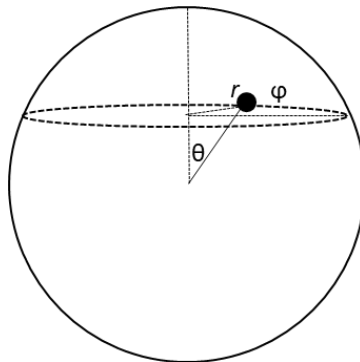
каде $\rho, \phi,$ и z се цилиндричните координати, додека $\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\phi,$ и \mathbf{e}_z се единичните вектори во цилиндричниот координатен систем. Единичните вектори во овој координатен систем се прикажани во **Фигура 2.2.**

Векторот на брзината во овој координатен систем го добиваме со разложување по тангенцијалната, радијалната, и z-компонентата, т.е., со диференцирање на векторот на положба:

$$\mathbf{v} = \dot{\rho}\mathbf{e}_\rho + \rho\dot{\phi}\mathbf{e}_\phi + \dot{z}\mathbf{e}_z.$$

На сличен начин, со повторно диференцирање на брзината, може да ја добиеме формулата за забрзување во цилиндрични координати.

Во сферен координатен систем, како координати се користат растојанието на материјалната точка од координатниот почеток r , аголот кој го дефинира материјалната точка во однос на координатниот почеток и вертикалата θ , и поларниот агол ϕ во рамнина на која лежи точката, нормална на вертикалата. Соодветните единечни вектори се \mathbf{e}_r долж радијалната насока, \mathbf{e}_θ нормален на \mathbf{e}_r и насочен кон вертикалата, и \mathbf{e}_ϕ нормален на \mathbf{e}_r и \mathbf{e}_θ , во рамнината дефинирана со испрекинатата кружница на фигурата која поминува низ точката, т.е., долж тангентата на оваа кружница.



Фигура 2.3. Сферни координати. Единичните вектори се долж поместувањата кои се добиваат со инфинезимално мало зголемување на соодветната координата.

Векторот на положба во сферни координати е

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = r\mathbf{e}_r.$$

Согласно **Фигура 2.3**, трансформацијата помеѓу сферните и Декартовите координати е дадена со

$$x = r\sin\theta\cos\varphi,$$

$$y = r\sin\theta\sin\varphi,$$

$$z = r\cos\theta.$$

Векторот на брзината го добиваме со разложување по радијалната, азимуталната, и поларната компонента, т.е., со диференцирање на векторот на положба:

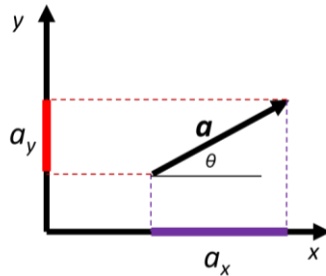
$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + r\sin\theta\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi.$$

Овие трансформации се базирани на проектирање на вектор по компоненти долж соодветните единечни вектори. На пример, во **Фигура 2.4** е прикажан вектор \mathbf{a} кој треба да се проектира на оските x и y . Проектирањето се врши со повлекување на нормали кон соодветните оски. Добиените проекции се означени со a_x и a_y . Овие проекции се скалари кои што може да се пресметаат преку тригонометриските релации

$$a_x = a\cos\theta,$$

$$a_y = a\sin\theta,$$

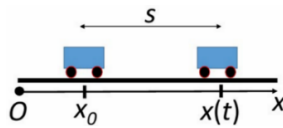
каде θ е аголот помеѓу векторот \mathbf{a} и хоризонталната оска, додека a е големината на векторот \mathbf{a} .



Фигура 2.4. Компоненти на вектор.

2.3 Движење во една димензија

Во наједноставниот случај на едно-димензионално движење, положбата на објектот е определена со една координата, $x(t)$.



Фигура 2.5. Движење на објект во една димензија.

Во **Фигура 2.5** е прикажан објект кој се движи во позитивната насока на оската x . Во временскиот момент t_0 , објектот има почетна координата x_0 , додека во произволен временски момент t објектот има координата $x(t)$. Освен ако не е специфицирано поинаку, во оваа книга, почетниот временски момент ќе го дефинираме како $t_0 = 0$ s. Разликата помеѓу моменталната координата и почетната координата на објектот се нарекува поместување, $\Delta x = x(t) - x_0$.

Кога објектот се движи со константна брзина v , може да запишеме

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t) - x_0}{t},$$

$$x(t) = x_0 + vt.$$

Оваа равенка се нарекува равенка на движење бидејќи овозможува да се определи позицијата на објектот во секое време.

Доколку брзината на објектот се менува со текот на времето, дефинираме средна брзина преку вкупното поместување во даден временски интервал:

$$v_{sr} = \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

Во случај кога движењето е со променлива брзина, моменталната брзина се пресметува како гранична вредност на средната брзина во бесконечно мал временски интервал:

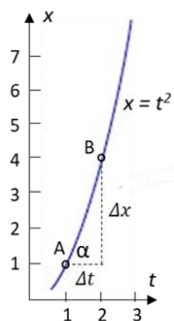
$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}.$$

Според оваа дефиниција, моменталната брзина се пресметува како прв извод на координатата како функција од времето.

Физичка интерпретација на првиот извод на координатата по времето

Диференцијалното и интегралното сметање се суштински при решавање на голем број на задачи во механиката. Преку следниот пример, накратко ќе го објасниме поимот за извод на функција како и основните правила за диференцирање.

Разгледуваме движење на автомобил кое може да се изрази со равенката $x = t^2$ (во бездимензионална форма, по соодветно нормирање). Ќе ги пресметаме координатите на автомобилот и неговите моментални брзини во временските моменти 1 s и 2 s, како и средната брзина на автомобилот во овој временски интервал.



Фигура 2.6. График на движење, $x = t^2$.

Во **Фигура 2.6** е претставен графикот на движење на овој објект, кој е во форма на парабола. Координатите на објектот во временските моменти 1 s и 2 s се пресметуваат со замена на овие вредности во равенката на движење, $x(1\text{ s}) = 1\text{ m}$, $x(2\text{ s}) = 4\text{ m}$.

Моменталните брзини во овие временски моменти може да се пресметаат како прв извод на равенката на движење во однос на времето.

Пред да ги пресметаме вредностите, ќе го објасниме графички значењето на изводот на функција (во случајов $x = t^2$). Изводот на функцијата го запишуваме како $\frac{dx}{dt}$ каде симболот пред x и t означува бесконечно мала промена на соодветната величина: $dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x$, додека $dt = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta t$.

Бидејќи x зависи од времето t , бесконечно малата промена dx е зависна од бесконечно малата промена dt , а односот на овие две бесконечно мали промени е дефиниран како извод на функцијата во даден временски момент t . Според ова, изводот може да се запише како $\frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$. Како што е прикажано во **Фигура 2.6**, првиот извод е определен

со наклонот на функцијата. Колку е поголем овој однос, толку е поголем наклонот на функцијата. Од правоаголниот триаголник во фигурата следи $\frac{\Delta x}{\Delta t} = \tan \alpha$.

Во граничен случај на бесконечно мала временска промена dt , т.е, кога точката B е бесконечно многу блиску до точката A, односот $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$ е еднаков на изводот на функцијата во точката A. Според ова, првиот извод е еднаков на тангенсот на аголот α кој го дефинира наклонот на функцијата во точката во која се пресметува изводот.

За да ја пресметаме моменталната брзина, ќе го најдеме првиот извод на функцијата $x = t^2$. Скратена ознака за првиот извод $\frac{dx}{dt}$ во однос на времето е \dot{x} .

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(t + \Delta t)^2 - t^2}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{t^2 + 2t\Delta t + (\Delta t)^2 - t^2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{2t\Delta t + (\Delta t)^2}{\Delta t} \\ &= 2t + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta t = 2t. \end{aligned}$$

Според ова, моменталната брзина на објектот \dot{x} е еднаква на $2t$ во произволен временски момент t . Со замена на бројните вредности, за моменталната брзина во временски моменти 1 s и 2 s добиваме вредности 2 и 4 m/s, соодветно.

Средната брзина во овој временски интервал е

$$v_{sr} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_B - x_A}{t_B - t_A} = 3 \text{ m/s.}$$

Со оглед на дефиницијата за извод на функција, ако $x = Ax_1 + Bx_2$, каде A и B се константи, а x_1 и x_2 се временски функции, тогаш првиот извод на функцијата x е

$$\dot{x} = A \dot{x}_1 + B \dot{x}_2.$$

Ако функцијата е $x = t^n$, каде n е цел број, првиот извод е $\dot{x} = n t^{n-1}$.

Ако функцијата x е производ на две функции $x = x_1 x_2$, првиот извод е $\dot{x} = \dot{x}_1 x_2 + x_1 \dot{x}_2$.

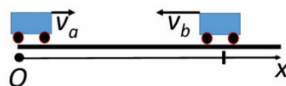
Ако функцијата е константа, првиот извод е нула. На пример, ако $x(t) = 5$, $\dot{x} = 0$.

Овие правила за извод на функции се изведуваат од дефиницијата за извод како гранична вредност, и се користат за пресметување на изводи на сложени функции кои може да се изразат преку елементарни функции.

На пример, ако $x = 4t^4 + 2t^2 - 5$, моменталната брзина е $\dot{x} = 4(t^4) + 2(t^2) - 0 = 4 \times 4t^3 + 2 \times 2t = 16t^3 + 4t$.

Решени примери

Пример 2.1. Два автомобили се движат во спротивни насоки со брзини $v_a = 5 \text{ m/s}$ и $v_b = -10 \text{ m/s}$. Ако почетното растојание помеѓу автомобилите е $d = 100 \text{ m}$, пресметај ги координатата и времето кога автомобилите ќе се сретнат. Кога автомобилот В ќе биде во координатниот почеток? Каде е автомобилот А во тој момент?



Фигура 2.7. Движење на два автомобили со константни брзини.

Оваа задача ќе ја решиме со равенките на движење за двата автомобили А и В:

$$x_a(t) = x_{0a} + v_a t,$$

$$x_b(t) = x_{0b} + v_b t.$$

Согласно почетната конфигурација прикажана во фигурата, $x_{0a} = 0, x_{0b} = d$. Во моментот на средба, координатите на автомобилите се еднакви,

$$x_a(t_s) = x_b(t_s),$$

каде t_s е времето кога автомобилите се сретнуваат. Со замена на равенките на движење, добиваме

$$x_{0a} + v_a t_s = x_{0b} + v_b t_s,$$

$$v_a t_s = d + v_b t_s.$$

Од оваа равенка, за времето на средба се добива

$$t_s = \frac{d}{v_a - v_b} \approx 6.6 \text{ s.}$$

За да ја пресметаме координатата на средба, го заменуваме времето на средба во било која од двете равенки на движење. На пример, ако замениме во равенката за автомобилот А, добиваме

$$x_a = v_a t_s \approx 5 \times 6.6 \text{ m} \approx 33.3 \text{ m.}$$

Истата вредност се добива и со замена во равенката за автомобилот В затоа што координатите на автомобилите се еднакви во моментот на средба.

За да го најдеме времето кога автомобилот В ќе биде во координатниот почеток, ќе ја искористиме неговата равенка на движење:

$$x_b(t) = d + v_b t.$$

Бидејќи координатата на координатниот почеток е 0, добиваме

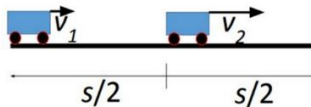
$$0 = d + v_b t,$$

$$t = -\frac{d}{v_b} = 10 \text{ s.}$$

За да определиме каде е автомобилот А во тој временски момент, го заменуваме ова време во равенката на движење за автомобилот А:

$$x_a(t) = x_{0a} + v_a t = 50 \text{ m.}$$

Пример 2.2. Пресметај ја средната брзина на автомобил кој првата половина од патот се движи со брзина $v_1 = 20 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, додека во втората половина од патот се движи со брзина $v_2 = 60 \text{ km/h}$.



Фигура 2.8. Движење на автомобил во една димензија со променлива брзина.

Оваа задача ќе ја решиме со користење на равенката за средна брзина

$$v_{sr} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_1 + x_2}{t_1 + t_2} = \frac{\frac{s}{2} + \frac{s}{2}}{t_1 + t_2}.$$

Времето на движење во првата половина од патот t_1 и времето на движење во втората половина од патот t_2 се

$$t_1 = \frac{\frac{s}{2}}{v_1} = \frac{s}{2v_1},$$

$$t_2 = \frac{\frac{s}{2}}{v_2} = \frac{s}{2v_2},$$

затоа што автомобилот во секој од тие два дела на патот се движи со константна брзина. Со замена на овие формули во равенката за средната брзина, добиваме

$$v_{sr} = \frac{s}{\frac{s}{2v_1} + \frac{s}{2v_2}} = \frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2} = 30 \text{ km/h.}$$

Овој резултат покажува дека, во општ случај, средната брзина (30 km/h) не може да се пресмета како аритметичка средина (40 km/h) на брзините v_1 и v_2 .

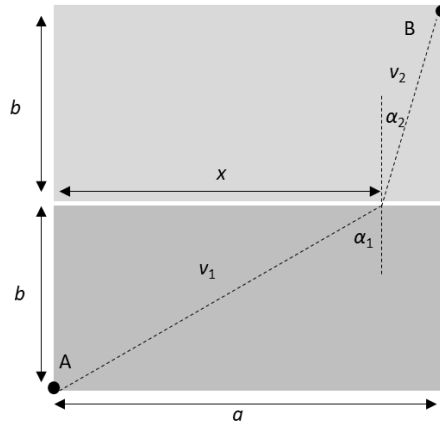
Пример 2.3. Разгледуваме движење во две средини. Патникот почнува со движење од точка А, и треба да стигне во точка В. Во првата средина, брзината на неговото движење е v_1 , додека во втората средина брзината на движење е v_2 . Определи ја формата на патеката по која треба да се движи патникот за да стигне до В за најкратко време, ако во секоја од двете средини патеката на движење мора да е права линија. Промена на правецот на движење е дозволена само на границата која ги одделува двете средини.

Геометријата на задачата е илустрирана во **Фигура 2.9**. Времето потребно за патување од А до В е

$$t = \frac{\sqrt{x^2 + b^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(a-x)^2 + b^2}}{v_2}.$$

Со диференцирање на времето по x добиваме

$$\frac{dt}{dx} = \frac{x}{v_1\sqrt{x^2 + b^2}} - \frac{(a-x)}{v_2\sqrt{(a-x)^2 + b^2}}.$$



Фигура 2.9. Оптимизација на патека на движење во средини со различни дозволени брзини.

За оптималната патека, овој прв извод е нула. Според тоа, добиваме

$$\frac{x}{v_1 \sqrt{x^2 + b^2}} = \frac{(a-x)}{v_2 \sqrt{(a-x)^2 + b^2}}.$$

Овој израз добива поедноставна форма доколку растојанијата се изразат преку аглиите:

$$\frac{\sin \alpha_1}{v_1} = \frac{\sin \alpha_2}{v_2}.$$

Геометријата на патеката е идентична на патеката по која би се простирал светлосен зрак, затоа што светлината се движи помеѓу две точки по патека која резултира во минимално време на простирање.

2.4 Релативна брзина

Разгледуваме два референтни системи S и S'. Системот S го разгледуваме како фиксен, додека системот S' се движи во однос на S со брзина u .

Според тоа, векторите на положба за истата материјална точка во двата системи се поврзани со релацијата

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{u}t.$$

Со диференцирање, ја добиваме врската помеѓу брзините во овие два референтни системи:

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}' + \mathbf{u}.$$

Пример 2.4. Два патнички возови се разминуваат движејќи се во спротивни насоки долж две паралелни пруги. Воз А се движи со брзина 45 m/s, додека воз В се движи со брзина 55 m/s. Двата возови имаат иста должина, 70 m. Пресметај колку време возот А ќе поминува покрај прозорецот на патник во возот В, и колку време возот В ќе поминува покрај прозорецот на патник во возот А.

Оваа задача е типичен пример за концептот на релативна брзина. Бидејќи возовите се движат во спротивни насоки, ако референтниот систем го поврземе со набљудувачот во возот А, брзината на возот В во однос на овој референтен систем ќе биде $V_B + V_A$. Во случај кога возовите би се движеле во иста насока, релативната брзина би била $V_B - V_A$.

Според тоа, за патник во возот А, возот В се движи со брзина 100 m/s. Бидејќи должината на возот е 70 m, временскиот период во кој возот В ќе поминува покрај прозорецот е

$$t = \frac{70 \text{ m}}{100 \text{ m/s}} = 0.7 \text{ s}.$$

За патник во воз В, возот А се движи со истата релативна брзина од 100 m/s. Според тоа, времето на разминување ќе биде идентично, 0.7 s.

2.5 Движење со забрзување

Забрзувањето на објект за движење во трите димензии се дефинира како прв извод на брзината во однос на времето:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \left(\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt}, \frac{dv_z}{dt} \right),$$

каде \mathbf{a} и \mathbf{v} се векторите на забрзување и брзина, соодветно, додека v_x , v_y , и v_z се компонентите на векторот на брзината на трите оски x , y , и z . Во оваа книга, вектори ќе означуваме со **болдиран** фонт. Согласно оваа формула, величината забрзување се изразува во единица $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

За наједноставниот случај на едно-димензионално движење, формулата за забрзувањето може да ја запишеме во скаларна форма:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \dot{v}_x,$$

каде \dot{v}_x означува временски извод (прв) на брзината.

Со оглед дека брзината е прв извод на координатата во однос на времето, следува дека забрзувањето може да го пресметаме како втор извод на координатата во однос на времето:

$$a_x = \ddot{x}.$$

Пример 2.5. Пресметај ги брзината и забрзувањето на објект кој се движи во една димензија според равенката $x = At^5 - 3Bt^4 - 5 \sin(kt)$, каде A , B , и k се константи.

Прв извод на функцијата $\sin t$ е $\cos t$, додека прв извод на функцијата $\cos t$ е $-\sin t$.

Со примена на правилата за диференцирање (пресметување на извод), за брзината и забрзувањето добиваме

$$\dot{x} = 5At^4 - 12Bt^3 - 5k \cos(kt),$$

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = 20At^3 - 36Bt^2 + 5k^2 \sin(kt).$$

Овој пример покажува дека брзината и забрзувањето може да се пресметаат ако е позната равенката на движење. Ако равенката на движење не е позната, а брзината и/или забрзувањето се познати како функции од времето, тогаш равенката на движење може да се добие со интегрирање (операција инверзна на диференцирање).

Интегралот на функцијата v во однос на времето се запишува како

$$\int v(t) dt.$$

Овој интеграл се нарекува неопределен интеграл. Решението на интегралот е функција чиј прв извод е функцијата $v(t)$. Бидејќи првиот извод на константна функција е 0, решението на неопределениот интеграл може да го запишеме како

$$\int v(t) dt = x(t) + C,$$

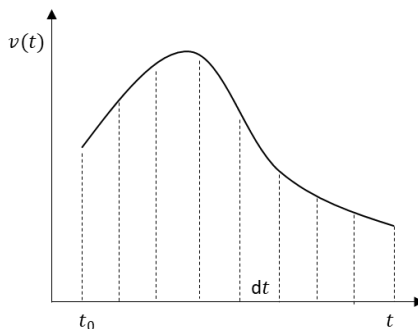
каде C е произволна константа, а $x(t)$ е функција за која важи $\dot{x} = v(t)$. Според ова, брзината ја пресметуваме како прв извод на координатата, додека координатата е интегралот на брзината во однос на времето. Произволната константа се определува од почетните или граничните услови на задачата. Во тој случај, неопределениот интеграл се заменува со определен интеграл, кој се дефинира со почетна точка t_0 и крајна точка t на интегрирање:

$$\int_{t_0}^t v(t)dt.$$

Решението на овој интеграл е

$$\int_{t_0}^t v(t)dt = x(t) - x(t_0).$$

Определениот интеграл е сумата на бесконечно мали поместувања на објектот $dx = v(t)dt$ од почетниот временски момент t_0 до даден временски момент t . Како резултат, го добиваме вкупното поместување на објектот $x(t) - x(t_0)$ во тој временски интервал.



Фигура 2.10. Геометриска интерпретација на определениот интеграл на брзината во однос на времето како површина на фигурата под кривата $v(t)$ во временскиот интервал од t_0 до t .

Како што е илустрирано во фигурата, определениот интеграл на брзината е еднаков на површината под кривата на брзината во дадениот временски интервал. Таа површина е еднаква на вкупното поместување на објектот.

Кога забрзувањето е константно, движењето се нарекува рамномерно забрзано движење ($a = \text{const.}$). Со интегрирање на забрзувањето во

однос на времето, се добиваат равенките за брзината и координатата како функции од времето.

$$v = \dot{x} = \int \ddot{x} dt = \int a dt = at + C,$$

каде C е константа која може да се определи преку почетната брзина. Ако го замениме почетниот услов $v(0) = v_0$, се добива $C = v_0$. Според ова, равенката за брзината како функција од времето е

$$v(t) = v_0 + at.$$

Бидејќи брзината е прв извод на координатата, равенката за координатата како функција од времето може да ја добиеме со интегрирање на брзината:

$$x = \int \dot{x} dt = \int (v_0 + at) dt = v_0 t + \frac{at^2}{2} + A,$$

каде A е константа која може да ја определиме од почетниот услов $x(t=0) = x_0$. Со замена на овој почетен услов во равенката, добиваме $A = x_0$. Според ова, равенката на движење е

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}.$$

Во случај на движење без забрзување, т.е., со константна брзина ($a = 0$), последниот член во равенката е нула, и равенката преминува во равенка на движење со константна брзина.

Пример 2.6. Автомобил се движи со почетна брзина 10 m/s со константно забрзување. После време 5 s брзината на автомобилот е 20 m/s. Најди ги забрзувањето и поминатиот пат во овој временски интервал.

Забрзувањето ќе го пресметаме со формулата

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{20 - 10 \text{ m}}{5 \text{ s}^2} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Поминатиот пат ќе го најдеме со формулата

$$s = x(t) - x_0 = v_0 t + \frac{at^2}{2} = 75 \text{ m}.$$

Пример 2.7. Автомобил се движи со почетна брзина $v_0 = 0 \text{ m/s}$ со константно забрзување. Пресметај го забрзувањето, ако после поминат пат $s = 400 \text{ m}$ брзината на автомобилот е $v = 100 \text{ km/h}$.

Ќе ги запишеме равенките за поминат пат и брзина како функција од времето за рамномерно забрзано движење:

$$s(t) = v_0 t + \frac{at^2}{2},$$

$$v(t) = v_0 + at.$$

Со замена $v_0 = 0 \text{ m/s}$, равенките се поедноставуваат:

$$s(t) = \frac{at^2}{2},$$

$$v(t) = at.$$

Во овие две равенки, непознати се забрзувањето и времето, така што нив може да ги најдеме со решавање на овој систем од две равенки. Ако од втората равенка го изразиме времето и го замениме во првата, добиваме

$$s(t) = \frac{av^2}{2a^2} = \frac{v^2}{2a}.$$

Од оваа равенка, за забрзувањето добиваме

$$a = \frac{v^2}{2s} = 0.96 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Пример 2.8. Автомобил кој се движи со почетна брзина 15 m/s почнува да кочи рамномерно со негативно забрзување $-0.1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Пресметај ги положбата на автомобилот после време 60 s, времето на кочење, и положбата на автомобилот кога ќе застане.

Положбата на автомобилот после 60 s ќе ја најдеме со равенката на движење,

$$x(t) = v_0 t + \frac{at^2}{2} = 720 \text{ m}.$$

Времето на кочење ќе го пресметаме од равенката за брзина како функција од времето. Кога автомобилот застанува, брзината е нула. Според тоа,

$$v(t) = v_0 + at = 0.$$

Од оваа равенка добиваме

$$t = -\frac{v_0}{a} = 150 \text{ s}.$$

Положбата на автомобилот во ова време, т.е., поминатиот пат до застанување е

$$x = v_0 t + \frac{at^2}{2} = 1125 \text{ m}.$$

Во случај на движење во две димензии, положбата на објектот е определена со две координати x и y :

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j},$$

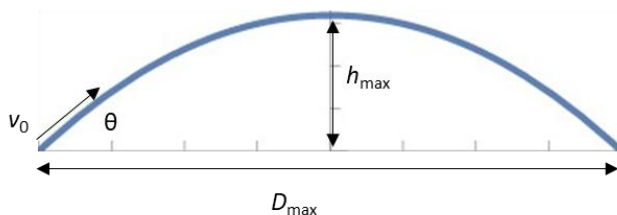
каде \mathbf{i} и \mathbf{j} се единични вектори долж координатните оски x и y . Со оглед на тоа што брзината и забрзувањето се дефинирани како прв и втор извод на векторот на положба, соодветно, тие може да се запишат преку соодветните компоненти на координатните оски x и y :

$$\mathbf{v} = \dot{x} \mathbf{i} + \dot{y} \mathbf{j} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j},$$

$$\mathbf{a} = \ddot{x} \mathbf{i} + \ddot{y} \mathbf{j} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j}.$$

Според ова, движењето во две (или три) димензии може да се разгледува како суперпозиција на две (или три) независни движења долж соодветните оски.

Пример 2.9. Објект е исфрлен под агол θ во однос на хоризонталата со почетна брзина v_0 . Определи ја равенката на патеката по која се движи објектот, неговата максимална висина, дометот, и времето на движење до моментот кога објектот ќе падне на површината. Да се претпостави дека движењето е слободно паѓање со хоризонтално забрзување 0 и вертикално забрзување $-g$ (гравитациско забрзување = $9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$).



Фигура 2.11. Траекторија на движење на објект исфрлен под агол θ .

Долж хоризонталната оска x , објектот се движи со забрзување 0. Според тоа,

$$x(t) = v_{0x}t = v_0 \cos(\theta) t,$$

$$v_x = v_0 \cos(\theta).$$

Долж вертикалната оска, објектот се движи со забрзување $-g$ (насочено вертикално надолу). Според тоа,

$$y(t) = v_{0y}t - \frac{gt^2}{2} = v_0 \sin(\theta)t - \frac{gt^2}{2},$$

$$v_y(t) = v_0 \sin(\theta) - gt.$$

Ако од равенката за $x(t)$ го изразиме времето преку координатата и го замениме во равенката за $y(t)$, ја добиваме равенката на траекторијата на движење:

$$y(x) = x \tan(\theta) - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2(\theta)}.$$

Според тоа, патеката на движење е парабола. Дометот на објектот ќе го најдеме од условот $y = 0$. Квадратната равенка која се добива има две решенија за x . Првото е $x = 0$, кое го претставува почетниот момент, и според тоа не е од интерес. Второто решение е дометот D на објектот,

$$D = \frac{2v_0^2 \cos^2(\theta) \tan(\theta)}{g} = \frac{2v_0^2 \sin(\theta) \cos(\theta)}{g} = \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{g}.$$

Функцијата $\sin(2\theta)$ има максимална вредност кога $2\theta = 90^\circ$. Ова значи дека дометот е максимален кога аголот на исфрлање е 45° .

Бидејќи движењето долж оската x е со константна брзина $v_0 \cos(\theta)$, времето на движење на објектот е

$$t = \frac{D}{v_0 \cos(\theta)} = \frac{2v_0^2 \sin(\theta) \cos(\theta)}{gv_0 \cos(\theta)} = \frac{2v_0 \sin(\theta)}{g}.$$

Со оглед на симетричноста на параболата во однос на највисоката точка, максималната висина се добива кога времето е половина од целото време на движење:

$$y_{max} = y \left(t = \frac{v_0 \sin(\theta)}{g} \right) = v_0 \sin(\theta) \frac{v_0 \sin(\theta)}{g} - \frac{g v_0^2 \sin^2(\theta)}{2g^2} = \frac{v_0^2 \sin^2(\theta)}{2g}.$$

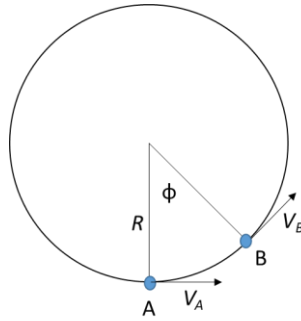
При константна почетна брзина, оваа формула покажува дека максималната висина е најголема кога аголот е 90° , т.е., кога имаме вертикално исфрлање на објектот.

2.6 Движење по кружна патека

Ова движење може да го карактеризираме со нови величини посоодветни за кружната геометрија, како што се аголот на движење, аголната брзина, и аголното забрзување.

Фигура 2.12 го илустрира движењето на објект прикажан со сината точка по кружна патека со радиус R . На почетокот на времето, објектот се наоѓа во точката А. Во време t , објектот е во позиција В. За овој временски интервал, објектот поминува пат s , кој е еднаков на должината на кружниот лак дефиниран со аголот ϕ .

Ќе разгледаме движење со константна брзина V . Векторот на брзината во овој случај постојано се менува, и секогаш е насочен по тангентата на кругот, додека модулот на брзината е постојана вредност. Векторите на брзината во точките А и В ги означуваме со \mathbf{V}_A и \mathbf{V}_B . Оваа брзина кај движење по кружна патека се нарекува и линиска брзина, различна од брзината која ја карактеризира промената на аголот со времето, која се нарекува аголна брзина ω .



Фигура 2.12. Движење по кружна патека.

Според тоа, аголната брзина ω се дефинира како

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

Промената на аголот е поврзана со поминатиот пат:

$$S = R\Delta\varphi.$$

Од оваа равенка, може да се добие релација која ги поврзува аголната и линиската брзина.

$$V = \frac{S}{\Delta t} = \frac{R\Delta\varphi}{\Delta t} = R\omega.$$

Со оглед на периодичниот карактер на ова движење, од интерес се и величините период T и фреквенција f . Период е времето кое е потребно за објектот да направи едно цело завртување по кругот, а фреквенцијата е бројот на цели завртувања по кругот за една секунда. Единица за период е секунда [s], додека единица за фреквенција е Херц [Hz].

Согласно дефинициите на периодот и фреквенцијата, тие се поврзани меѓу себе со едноставна математичка релација,

$$T = \frac{1}{f}.$$

Според оваа формула, ако ја знаеме едната од овие две величини, едноставно можеме да ја пресметаме и втората.

Ако во формулата за аголна брзина временскиот интервал го изедначиме со периодот на движење, поминатиот агол е еднаков на аголот за цел круг, 2π . Ако ги замениме овие вредности во формулата, се добива релација која ги поврзува аголната брзина и периодот на движење:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Иако движењето на објектот е движење со константна линиска брзина, векторот на линиската брзина постојано се менува, и според тоа објектот се движи со забрзување, кое во овој случај се нарекува центрипетално забрзување.

Формулата за определување на ова забрзување може да се добие со анализа на **Фигура 2.12** за мал временскиот интервал. Согласно геометријата во фигурата, аголот помеѓу брзините \mathbf{V}_A и \mathbf{V}_B е еднаков на аголот ϕ . Забрзувањето може да се пресмета како

$$\mathbf{a} = \frac{\Delta \mathbf{V}}{\Delta t},$$

каде $\Delta \mathbf{V} = \mathbf{V}_B - \mathbf{V}_A$ е промената на векторот на линиска брзина во малиот временски интервал Δt .

Овој вектор на промена е насочен кон центарот на кругот. Според тоа, ова забрзување се нарекува центрипетално забрзување. Со оглед на апроксимацијата со мал временски интервал, аголот ϕ има мала вредност, така што модулот на $\Delta \mathbf{V}$ може да се апроксимира како должина на кружен лак од кружница со радиус еднаков на брзината $V_A = V_B = V$. Според тоа, $\Delta V = V\Delta\phi$. Оваа формула ќе ја замениме во формулата за забрзување

$$a = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{V\Delta\varphi}{\Delta t} = V\omega,$$

$$a = \frac{V^2}{R}.$$

Со оваа формула може да се пресмета забрзувањето на објектот ако е позната негова линиска брзина и радиусот на кружната патека.

Ако објектот се движи со променлива линиска брзина по кружната патека, тогаш променлива е и неговата аголна брзина. Во таков случај се дефинира величина аголно забрзување која се пресметува со формулата

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}.$$

Ако аголното забрзување е константно, формулите за аголна брзина и агол со текот на времето се аналогни на соодветните за брзина и координата кај рамномерно забрзано движење:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t,$$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}.$$

Пример 2.10. Објект А се движи по круг со радиус $R = 2$ m со константна линиска брзина, и за 1 s поминува агол од π rad. Пресметај ги ω , V , T , f , a , и S .

Со оглед на тоа што е познат поминатиот агол и временскиот интервал, можеме да ја пресметаме аголната брзина,

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Линиската брзина може да се пресмета преку аголната брзина и радиусот,

$$V = \omega R = 2\pi \frac{m}{s}.$$

Користејќи ја релацијата

$$\omega = \frac{2\pi}{T},$$

може да се пресмета периодот:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2 \text{ s}.$$

Знаејќи го периодот, можеме да ја пресметаме и фреквенцијата,

$$f = \frac{1}{T} = 0.5 \text{ Hz}.$$

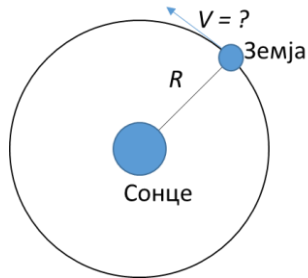
Забрзувањето ќе го пресметаме со формулата

$$a = \frac{V^2}{R} = 2\pi^2 \frac{m}{s^2}.$$

Поминатиот пат може да се пресмета со формулата

$$S = R\Delta\varphi = 2\pi \text{ m}.$$

Пример 2.11. Пресметај со колкава линиска брзина ротира Земјата околу Сонцето ако растојанието помеѓу нив е $150 \times 10^9 \text{ m}$.



Фигура 2.13. Револуција на Земјата околу Сонцето.

Земјата се движи по кружна патека со познат радиус. За да ја пресметаме линиската брзина, прво треба да се определи аголната брзина. Оваа величина може да се пресмета директно преку нејзината релација со периодот на движење T , кој е познат, = 1 година = 365 дена = 365×24 часа = $365 \times 24 \times 3600$ s.

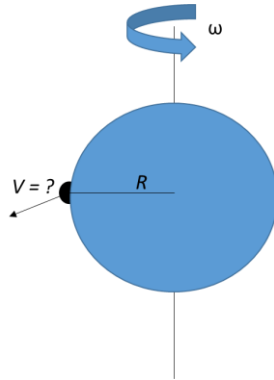
$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Откако ја пресметавме аголната брзина, линиската брзина ќе ја определиме со формулата

$$V = \omega R = \frac{2\pi}{T} R \approx 30 \frac{\text{km}}{\text{s}}.$$

Согласно овој резултат, Земјата се движи со многу голема брзина околу Сонцето, и за една секунда поминува пат од дури 30 km.

Пример 2.12. Пресметај со колкава линиска брзина се движи точка на Земјината површина на Екваторот како резултат на ротацијата на Земјата околу нејзината сопствена оска. Пресметај го и центрипеталното забрзување на таа точка. Радиусот на Земјата е $R = 6400$ km.



Фигура 2.14. Ротација на Земјата околу сопствената оска.

Покрај движењето околу Сонцето, Земјата исто така ротира околу својата сопствена оска со константна аголна брзина. Периодот на оваа ротација е еден ден. Знаејќи го периодот, ќе ја пресметаме прво аголната брзина,

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Следно, ја пресметуваме линиската брзина на точката на површината,

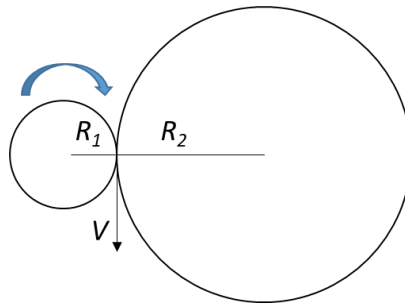
$$V = \omega R = \frac{2\pi}{T} R = 465 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

За забрзувањето добиваме

$$a = \frac{V^2}{R} = 0.034 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

И покрај тоа што линиската брзина на точката е голема, оваа ротација не ја чувствуваме поради тоа што вредноста на центрипеталното забрзување е многу мала, т.е., оваа ротација може да се апроксимира како движење по права линија со константна брзина во краток временски интервал.

Пример 2.13. Разгледуваме систем кој се состои од два дискови кои се во контакт. Овие дискови имаат различни радиуси, $R_1 = 1 \text{ m}$, $R_2 = 3 \text{ m}$. Ако периодот на ротација на првиот диск е 1 s , пресметај го периодот на ротација на вториот диск.



Фигура 2.15. Ротационо движење на два дискови.

Ротацијата на првиот диск индуцира ротација на вториот диск во обратна насока поради нивниот контакт. За да го пресметаме периодот на ротација на вториот диск, треба да ја пресметаме неговата аголна брзина, која е директно поврзана со линиската брзина на контактната точка. Оваа линиска брзина има иста вредност за првиот и вториот диск, според конфигурацијата прикажана во фигурата. Според тоа,

$$V_1 = V_2.$$

Во оваа формула, линиските брзини ќе ги изразиме прво преку аголните брзини, а потоа преку периодите на движење.

$$\omega_1 R_1 = \omega_2 R_2,$$

$$\frac{2\pi}{T_1} R_1 = \frac{2\pi}{T_2} R_2.$$

Од оваа формула, може да го пресметаме периодот на ротација на вториот диск:

$$T_2 = \frac{T_1 R_2}{R_1} = 3 \text{ s.}$$

Пример 2.14. Објект се движи по кружна патека со радиус 2.3 m со аголно забрзување $\varepsilon = 0.1 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$ со почетна аголна брзина еднаква на нула. Пресметај колку време е потребно објектот да го направи првото цело завртување околу кругот и колку е аголната брзина во тој временски момент.

Во оваа задача имаме ротација со константно аголно забрзување. Според тоа, ќе ги искористиме изведените формули за агол и аголна брзина.

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}.$$

Бидејќи почетната аголна брзина е еднаква на нула, формулата добива поедноставен облик

$$\varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2}.$$

Бидејќи се бара времето за цело завртување, аголот е $2\pi \text{ rad}$. Според тоа,

$$2\pi \text{ rad} = \frac{\varepsilon t^2}{2}.$$

Од оваа формула, може да го пресметаме времето,

$$t = \sqrt{\frac{4\pi \text{ rad}}{\varepsilon}} = 11.2 \text{ s.}$$

За да ја пресметаме аголната брзина, ќе ја искористиме формулата

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t = 1.12 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

3. ДИНАМИКА

3.1 Њутнови закони

Делот од механика во кој се проучуваат причините поради кои некој објект се движи се нарекува динамика. Основни закони на динамиката се Њутновите закони. Иако овие закони имаат едноставна математичка форма, може да се искористат за решавање на голем број на практични задачи.

Основна величина во овие закони е сила. Дејството на одредена сила долж некоја насока предизвикува движење на објект кој првично се наоѓа во состојба на мирување. Постојат три Њутнови закони.

Првиот закон е законот на инерција. Согласно овој закон, објект се наоѓа во состојба на мирување или рамномерно праволиниско движење се додека на него не подејствува надворешна сила.

Вториот Њутнов закон може да се изрази математички во следнава форма

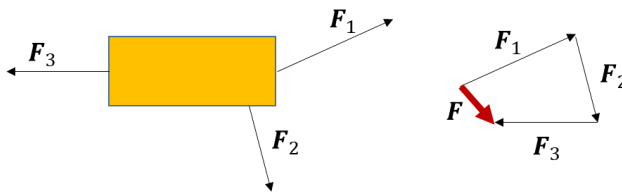
$$\mathbf{F} = m\mathbf{a},$$

каде \mathbf{F} е вкупната сила која дејствува на објектот, m е неговата маса, и \mathbf{a} е резултантното забрзување индуцирано од дејството на оваа вкупна сила. Со користење на оваа едноставна математичка равенка, може да се определи забрзувањето на објектот кога се познати сите сили кои дејствуваат врз него. Релацијата е векторска поради тоа што и силата и забрзувањето се векторски величини, кои имаат одредена насока, додека масата е скаларна величина која што се дефинира само со бројна вредност.

Ако врз објектот дејствуваат повеќе сили, тогаш вкупната сила се добива како векторски збир на сите сили. На пример, ако на објектот дејствуваат вкупно n сили,

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_n.$$

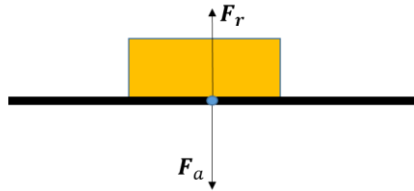
Ова векторско собирање на сили е илустрирано во **Фигура 3.1**. На правоаголниот објект дејствуваат три сили со различни големи и различни насоки. Овие сили се прикажани на левиот дел од фигурата. Во десниот дел е прикажано дека збирот на трите сили е нов вектор кој се добива ако векторите на трите сили се надоврзат. Резултантната сила е векторот кој почнува од почетокот на првата сила и завршува во крајната точка на третата сила. Резултантниот вектор е означен со дебелата црвена стрелка. Оваа збирна сила е силата која ја користиме во вториот Њутнов закон за да го пресметаме забрзувањето на објектот ако неговата маса е позната.



Фигура 3.1. Резултантна сила како збир на повеќе сили.

Третиот Њутнов закон е законот за акција и реакција. Согласно овој закон, при заемно дејство на два објекти, ако првиот објект дејствува со сила врз вториот, тогаш и вториот објект дејствува со иста таква сила по големина во обратна насока на првиот објект. Овој закон може да се запише математички како

$$\mathbf{F}_a = -\mathbf{F}_r.$$



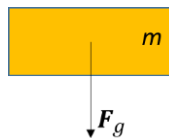
Фигура 3.2. Сили на акција и реакција.

Овој закон е илустриран во **Фигура 3.2**, каде правоаголен објект е поставен на рамна површина. Ако објектот дејствува на површината со сила F_a насочена вертикално надолу, тогаш и површината дејствува со иста таква сила по големина насочена вертикално нагоре F_r . Силите кои дејствуваат на објект може да бидат од различна природа, механички, електрични, магнетни, гравитациски, итн.

3.2 Сили во механика

Гравитациска сила се појавува како резултат на дејството на Земјината топка врз објектите на нејзината површина. Оваа сила се изразува преку формулата

$$F_g = mg.$$

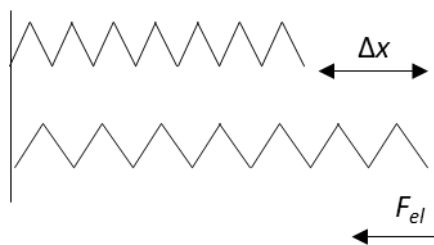


Фигура 3.3. Гравитациска сила.

Насоката на оваа сила која дејствува на сите објекти е вертикално надолу кон Земјината површина. Поради дејството на оваа сила,

објектите кои не се прицврстени паѓаат вертикално надолу. g се нарекува Земјино забрзување, и има константна вредност за сите објекти (9.81 m/s^2). Согласно вториот Њутнов закон и формулата за гравитациска сила, сите објекти во слободен пад кон земјината површина се движат со константно забрзување g .

Друг вид на сила која што често се сретнува во механиката е еластичната сила, илустрирана во **Фигура 3.4**. Во горниот дел е прикажан еластичен објект кој што е прицврстен на левиот крај во статична положба кога не дејствува надворешна сила. Кога го издолжуваме овој еластичен објект, како што е прикажано во долниот дел од фигурата, се индуцира еластична сила која се стреми да го врати објектот во статична положба. Еластичната сила F_{el} е пропорционална на издолжувањето Δx . Коефициентот на пропорционалност се нарекува коефициент на еластичност k и ја карактеризира еластичноста на објектот.



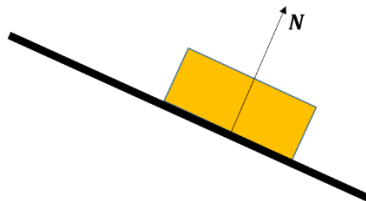
Фигура 3.4. Еластична сила.

Формулата со која ја пресметуваме еластичната сила е

$$F_{el} = -k\Delta x.$$

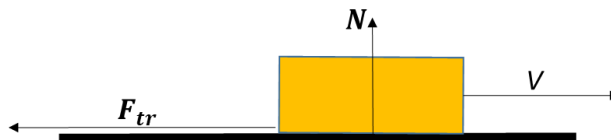
Знакот минус е поради тоа што еластичната сила и поместувањето имаат спротивни насоки. Ако сакаме да го издолжиме објектот на лево, се појавува сила која сака да го врати кон десно, и обратно.

Реакција на површина N е следен вид на сила кој што се појавува во многу практични проблеми во механиката. Оваа сила дејствува на објекти кои се наоѓаат на површина, и е насочена нормално во однос на рамнината на површината, како што е илустрирано во **Фигура 3.5**.



Фигура 3.5. Реакција на површина.

Сила на триење е механичка сила која што се спротиставува на движењето на објекти, бидејќи е насочена во обратна насока од насоката на движење. За објект на рамна површина кој се движи на десно со брзина V , насоката на оваа сила е кон лево, како што е илустрирано во **Фигура 3.6**.



Фигура 3.6. Сила на триење.

Оваа сила е пропорционална на реакцијата на површината N при влечење на објект по површината. Коефициентот на пропорционалност се нарекува коефициент на триење μ . Формулата со која се пресметува оваа сила е

$$F_{tr} = \mu N.$$

Инерцијална сила: Њутновите закони се формулирани за инерцијални референтни системи, во кои секој објект е во состојба на инерција се додека на него не подејствува надворешна сила. Ако разгледуваме референтен систем кој се движи со забрзување \mathbf{a} во однос на инерцијален референтен систем, на секој објект во ваков неинерцијален систем дејствува дополнителна сила $-\mathbf{ma}$ поради забрзувањето на системот, која се нарекува инерцијална сила. Оваа сила не е реална сила, т.е., не се појавува како резултат на дејство на друг објект, туку резултира од изборот на неинерцијален референтен систем кој се движи со забрзување во однос на референтниот инерцијален систем.

3.3 Кориолисова сила

Разгледуваме два референтни системи, едниот инерцијален, додека вториот е систем кој ротира околу z оската со константна аголна брзина ω . Z -оските на двата системи се совпаѓаат. Поради ротацијата, во ротирачкиот референтен систем, ќе дејствуваат инерцијални сили, т.е., псевдо-сили, кои се појавуваат поради неинерцијалното движење на ротирачкиот систем. Претходно, покажавме дека во неинерцијален систем кој се движи транслаторно без ротација се појавува инерцијална сила, $-\mathbf{ma}$, каде \mathbf{a} е транслаторното забрзување на неинерцијалниот систем.

Во случајот на ротација на референтниот систем, инерцијалната сила има две компоненти, центрифугална, која се појавува поради ротацијата на системот и дејствува на објект кој може и да не се движи во ротирачкиот систем, и уште една псевдо-сила, наречена Кориолисова сила, која дејствува само на објекти кои се движат во ротирачкиот неинерцијален систем. За да го покажеме ова, ќе ја запишеме релацијата помеѓу брзините во ротирачкиот систем и инерцијалниот систем:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{r} = \frac{d}{dt} \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'.$$

Ова покажува дека диференцилниот оператор се трансформира како

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_I = \left(\frac{d}{dt}\right)_{NI} + \boldsymbol{\omega} \times,$$

каде индексите I и NI се однесуваат на инерцијалниот и неинерцијалниот референтен систем, соодветно. Со повторна примена на оваа трансформација за диференцијалниот оператор добиваме

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt}\right)_I \left(\frac{d}{dt}\right)_I &= \left(\frac{d}{dt}\right)_I \left(\left(\frac{d}{dt}\right)_{NI} + \boldsymbol{\omega} \times \right) = \left(\frac{d}{dt}\right)_I \left(\frac{d}{dt}\right)_{NI} + \boldsymbol{\omega} \times \left(\frac{d}{dt}\right)_I \\ &= \left(\frac{d}{dt}\right)_{NI} \left(\frac{d}{dt}\right)_{NI} + \boldsymbol{\omega} \times \left(\frac{d}{dt}\right)_{NI} + \boldsymbol{\omega} \times \left(\frac{d}{dt}\right)_{NI} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \\ &= \left(\frac{d}{dt}\right)_{NI} \left(\frac{d}{dt}\right)_{NI} + 2\boldsymbol{\omega} \times \left(\frac{d}{dt}\right)_{NI} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times. \end{aligned}$$

Со примена на оваа операторска трансформација на векторот на положба ја добиваме релацијата помеѓу забрзувањата во инерцијалниот и неинерцијалниот систем:

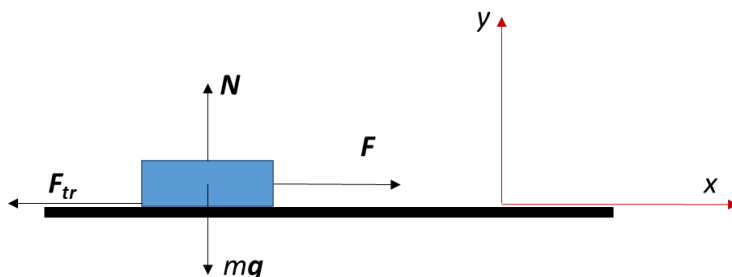
$$\mathbf{a}_{NI} = \mathbf{a}_I - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}_{NI} - \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}.$$

Третиот член на десната страна помножен со масата е центрифугалната сила, додека вториот член помножен со масата се нарекува Кориолисова сила. Според тоа, покрај центрифугалната сила, движење во ротирачкиот систем генерира дополнителна Кориолисова псевдо-сила

$$\mathbf{F}_C = -2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}_{NI}.$$

Решени примери

Пример 3.1. Објект со маса 0.1 kg се влече со сила 5 N по површина со коефициент на триење 0.1. Пресметај го забрзувањето на објектот.



Фигура 3.7. Движење под дејство на влечна сила во присуство на сила на триење.

Силите кои дејствуваат на објектот, и координатниот систем се илустрирани во фигурата. Вториот Њутнов закон за овој објект е

$$F + F_{tr} + N + mg = ma.$$

За решавање на оваа задача, ќе го примениме пристапот на проекции на сили на координатните оски x и y . На оската x , со проектирање на сите сили, се добива следнава форма на Њутновиот закон:

$$F - F_{tr} + 0 + 0 = ma.$$

На оската y , проекцијата на забрзувањето е еднаква на нула. Според тоа, добиваме

$$0 + 0 + N - mg = 0.$$

Од оваа равенка, можеме да ја најдеме реакцијата на површината:

$$N = mg.$$

Оваа формула ќе ја замениме во проектираниот закон на оската x во кој е вклучена силата на триење,

$$F_{tr} = \mu N = \mu mg.$$

Со замена на оваа равенка во равенката долж оската x се добива

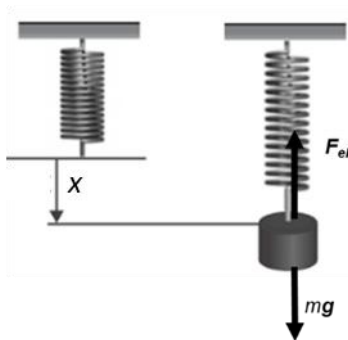
$$F - \mu mg = ma.$$

Од оваа равенка ја добиваме вредноста на забрзувањето,

$$a = \frac{F - \mu mg}{m} \approx 49 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Пример 3.2. Цилиндричен тег со маса 0.2 kg е закачен на еластичен објект со коефициент на еластичност 34 N/m . Пресметај го издолжувањето на еластичниот објект во однос на статичната положба.

Левиот дел во фигурата ја прикажува статичната положба на еластичниот објект, додека десниот дел ја прикажува рамнотежната положба на системот после прикачувањето на тегот кога еластичниот објект се издолжува за растојание x .



Фигура 3.8. Издолжување на пружина под дејство на гравитациска сила од прикачен објект.

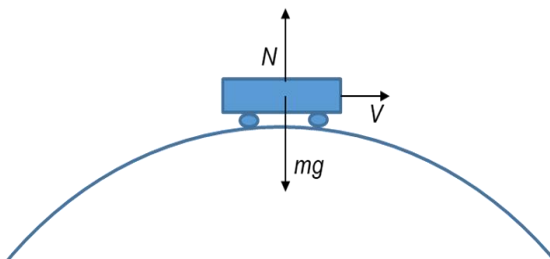
На тегот дејствуваат две сили, еластичната и гравитациската. Овие две сили во рамнотежната положба се изедначуваат. Двете сили се вертикални. Според тоа, потребна е само една вертикална координатна оска за проекција на Њутновиот закон.

$$F_{el} - mg = ma = 0,$$

$$kx - mg = 0,$$

$$x = \frac{mg}{k} = 0.059 \text{ m} = 5.9 \text{ cm}.$$

Пример 3.3. Автомобил со маса 1000 kg се движи по мост со радиус 20 m со брзина 10 m/s. Пресметај ја силата на реакција на површината на најгорната точка од мостот и максималната брзина со која што автомобилот може да се движи во таа точка.



Фигура 3.9. Движење на автомобил по кружна површина.

Автомобилот се движи по дел од кружница со константна брзина. Во најгорната точка дејствуваат две сили, гравитациска и реакција на површината. Овие две сили заедно генерираат центрипетална сила која е еднаква на масата на автомобилот помножена со центрипеталното забрзување, согласно вториот Њутнов закон. Сите сили во случајов се вертикални. Проектираниот втор Њутнов закон на вертикалната оска е

$$mg - N = ma_c = m \frac{v^2}{R}.$$

Од оваа равенка директно може да ја најдеме реакцијата на површината

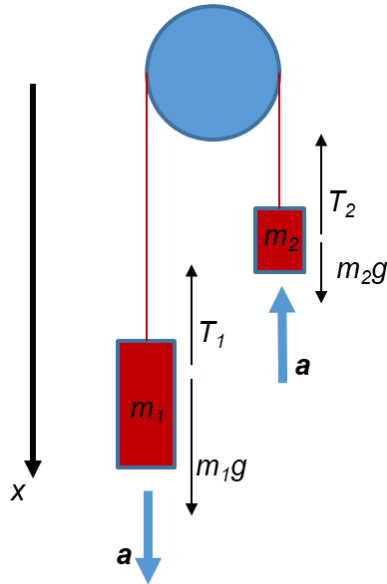
$$N = mg - m \frac{v^2}{R} = m \left(g - \frac{v^2}{R} \right) = 5000 \text{ N}.$$

Постои брзина при која реакцијата на површината станува нула. Во таа состојба, автомобилот нема контакт со површината. Според тоа, не е возможно да се реализира поголема брзина на движење во најгорната точка од оваа максимална брзина.

$$g - \frac{v_{max}^2}{R} = 0.$$

$$v_{max} = \sqrt{gR} = 14.1 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Пример 3.4. Два објекта со маси 3 kg и 1 kg се поврзани меѓусебно со конец кој е прикачен на диск со занемарливо мала маса кој може да ротира околу центарот слободно без триење. Пресметај го забрзувањето на системот од два објекти ако тие се остават да се движат слободно без никакви надворешни сили.



Фигура 3.10. Движење на два поврзани објекти.

Во фигурата се означени сите сили кои дејствуваат на двата објекти. Сите се вертикални сили. Според тоа, потребна е само една оска за проекција насочена како што е прикажано во фигурата. Првиот објект е потежок од вториот, и затоа тој ќе почне да се движи надолу, а вториот објект ќе биде повлечен од првиот преку крајот и ќе почне да се движи нагоре. Поради тоа што објектите се меѓусебно поврзани, големините на нивните забрзувања се еднакви. Двата објекти се поврзани со истиот крај, што значи дека силите T_1 и T_2 се еднакви.

$$T_1 = T_2 = T,$$

$$a_1 = a_2 = a.$$

Проектираните Њутнови закони за двата објекти се

$$m_1g - T_1 = m_1a_1,$$

$$m_2g - T_2 = -m_2a_2.$$

Согласно еднаквоста на силите на крајот и забрзувањата, овие равенки ја добиваат следнава форма

$$m_1 g - T = m_1 a,$$

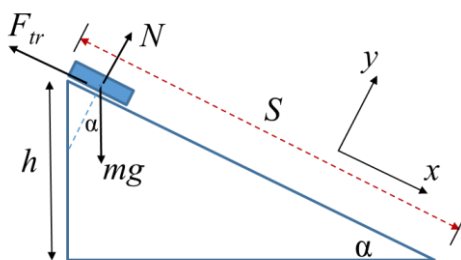
$$m_2 g - T = -m_2 a.$$

Забрзувањето може да се пресмета со решавање на овој систем на равенки. Ако од втората равенка го изразиме T и го замениме во првата равенка, се добива

$$m_1 g - (m_2 g + m_2 a) = m_1 a,$$

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_2 + m_1} g \approx 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Пример 3.5. На рамнина наклонета под агол 30° се наоѓа правоаголен објект со маса 1 kg. На почетокот, објектот е на висина $h = 1$ m од хоризонталата. Коефициентот на триење на површината е $\mu = 0.1$. Пресметај го времето кое е потребно објектот да се симне од вертикалната рамнина до хоризонталата ако е оставен да се движи без дополнителни надворешни сили.



Фигура 3.11. Движење на објект по наклонета рамнина.

Прво, ќе го пресметаме забрзувањето со кое се движи објектот надолу по рамнината. Координатниот систем го поставуваме како што е прикажано во фигурата, за забрзувањето да има компонента само долж оската x . На објектот дејствуваат три сили, реакцијата на површината, гравитациската сила, и силата на триење. Векторскиот збир на овие сили доведува до забрзување на објектот. За да го пресметаме забрзувањето, ќе го запишеме вториот Њутнов закон:

$$F_{tr} + N + mg = ma.$$

На оската x , проекцијата на овој закон е

$$-F_{tr} + 0 + mgsin\alpha = ma.$$

На оската y , проекцијата е

$$0 + N - mg\cos\alpha = 0.$$

Од оваа равенка, се добива

$$N = mg\cos\alpha.$$

Ако овој израз го замениме во проекцијата на оската x согласно формулата за силата на триење, добиваме

$$-\mu mg\cos\alpha + mgsin\alpha = ma.$$

Од оваа равенка, ќе го пресметаме забрзувањето,

$$a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) \approx 4 \frac{m}{s^2}.$$

Движењето на објектот надолу е движење со константно забрзување без почетна брзина, за кое релацијата помеѓу поминатиот пат и времето е

$$S = \frac{at^2}{2}.$$

Со користење на тригонометриските релации, со оглед на геометријата во фигурата, може да запишеме

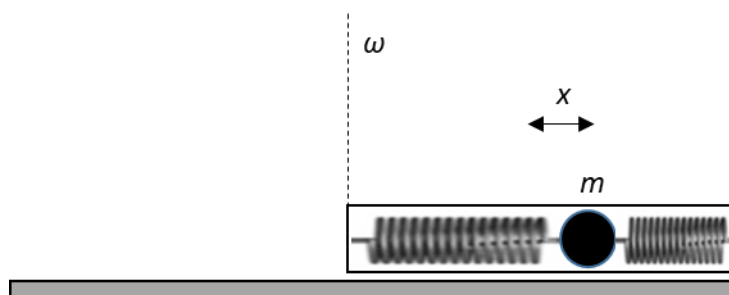
$$S = \frac{h}{\sin\alpha}.$$

Со замена на овој израз во претходната формула се добива

$$\frac{h}{\sin\alpha} = \frac{at^2}{2},$$

$$t = \sqrt{\frac{2h}{a\sin\alpha}} \approx 1 \text{ s.}$$

Пример 3.6. Топка со маса m е прикачена на две пружини во цилиндричен сад кој ротира околу едниот крај со аголна брзина ω околу вертикалната оска. Во отсуство на ротација, топката е на средината на цилиндерот, и пружините се во нивните рамнотежни положби. Пресметај го поместувањето на топката од рамнотежната положба долж радијалната насока ако коефициентот на еластичност на секоја од пружините е k .



Фигура 3.12. Ротација на топка помеѓу две пружини во цилиндричен сад.

Бидејќи топката ротира по кружница, збирот на еластичните сили од пружините е еднаков на центрипеталната сила:

$$2kx = m\omega^2 \left(\frac{L}{2} + x \right),$$

каде L е должината на цилиндерот. За поместувањето на топката добиваме

$$x = \frac{L}{2} \frac{m\omega^2}{2k - m\omega^2}.$$

Со оглед на геометријата на задачата, решението има физичка смисла

кога $x < \frac{L}{2}$. Ова е исполнето кога $\frac{m\omega^2}{2k - m\omega^2} < 1$, т.е., $\omega < \sqrt{\frac{k}{m}}$.

4. РАБОТА, ЕНЕРГИЈА, И ИМПУЛС

4.1 Работа и енергија

Ако на објект дејствува вкупна сила \mathbf{F} која го поместува долж елементарен вектор $d\mathbf{r}$, извршената елементарна работа на оваа сила е дефинирана со следниов скаларен производ:

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Вкупната работа која ја врши оваа сила при поместување на објектот долж произволна патека се пресметува како линиски интеграл на оваа сила долж траекторијата на движење од почетната до крајната точка:

$$W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Од вториот Њутнов закон, силата може да ја изразиме преку изводот на брзината на објектот. Со замена во претходнава равенка добиваме

$$W_{AB} = \int_A^B m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{r}.$$

Во овој линиски интеграл, A и B се почетната и крајната точка на траекторијата на движење, соодветно. Елементарното поместување може да го запишеме преку моменталната брзина, $d\mathbf{r} = \mathbf{v} dt$. Со замена на овој израз во интегралот добиваме

$$W_{AB} = \int_A^B m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} dt.$$

Скаларниот производ во интегралот може да го трансформираме со користење на следнава равенка

$$\frac{d(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})}{dt} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 2 \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v}.$$

Според тоа,

$$\begin{aligned} W_{AB} &= \int_A^B m \frac{d(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})}{2dt} dt = \int_A^B d\left(\frac{m\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2}\right) = \int_A^B d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \frac{mv_B^2}{2} - \frac{mv_A^2}{2} \\ &= K_B - K_A. \end{aligned}$$

Величината $K = \frac{mv^2}{2}$ се нарекува кинетичка енергија. Оваа равенка покажува дека извршената работа е еднаква на промената на кинетичката енергија на објектот. Двете величини, работа и кинетичка енергија, се мерат во единица Џул [J].

Со користиње на претходнава равенка, извршената работа може да ја пресметаме ако се познати почетната и крајната брзина на објектот.

Силите може да се поделат во две категории, конзервативни и неконзервативни. Оваа класификација е поврзана со нивниот линиски интеграл. Ако линискиот интеграл на силата од почетна точка A до крајна точка B е ист, независно од формата на патеката по која се движи објектот, тогаш таа сила е конзервативна сила. Во случајот на неконзервативна сила, вредноста на линискиот интеграл од почетната точка A до крајната точка B зависи од патеката по која се движи објектот.

Според тоа, работата може да ја запишеме како

$$W_{AB} = \int_A^B \mathbf{F}_c \cdot d\mathbf{r} + \int_A^B \mathbf{F}_{nc} \cdot d\mathbf{r},$$

каде вкупната сила е преставена како збир на конзервативната \mathbf{F}_c и неконзервативната \mathbf{F}_{nc} компонента. Со оглед на дефиницијата за конзервативна сила, нејзиниот линиски интеграл зависи само од почетната и крајната точка. Според тоа, може да се дефинира функција потенцијална енергија $U(x, y, z)$ за конзервативната сила со формулата

$$\int_A^B \mathbf{F}_c \cdot d\mathbf{r} = -\Delta U = -(U_B - U_A).$$

Со диференцирање на оваа равенка добиваме

$$\mathbf{F}_c = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right).$$

Оваа равенка покажува дека конзервативната сила може да се изрази преку градиентот (векторски парцијален извод по трите координати) на потенцијалната енергија.

Со замена на овие формули, работата може да се изрази како

$$W_{AB} = -\Delta U + \int_A^B \mathbf{F}_{nc} \cdot d\mathbf{r}.$$

Во случај на отсуство на неконзервативни сили, извршената работа на силата е директно поврзана со промената на потенцијалната енергија на конзервативната сила.

Гравитациската сила е типичен пример за конзервативна сила бидејќи нејзиниот линиски интеграл е еднаков за различни траектории на движење при фиксирани почетна и крајна точка. Промената на гравитациската потенцијална енергија можеме да ја пресметаме со замена на гравитациската сила во линискиот интеграл:

$$\Delta U = -\int_A^B \mathbf{F}_g \cdot d\mathbf{r} = -\int_A^B (m\mathbf{g}) \cdot d\mathbf{r} = \int_A^B mg \, dz = mgz_B - mgz_A = mgh,$$

каде $h = z_B - z_A$ е висинската разлика помеѓу точките A и B . Според оваа формула, гравитациската потенцијална енергија е определена со висината на која се наоѓа објектот. При решавање на конкретни задачи, произволна точка се избира како нулто висинско ниво, и во однос на неа

се пресметуваат потенцијалните енергии за останатите позиции од интерес.

Следен типичен пример за конзервативна сила е еластичната сила,

$$\mathbf{F}_{ел} = -kx,$$

каде k е коефициент на еластичност и x е поместувањето од рамнотежната положба. Со пресметување на интегралот, за еластичната потенцијална енергија добиваме

$$\Delta U = - \int_A^B \mathbf{F}_g \cdot d\mathbf{r} == - \int_A^B (-kx) \cdot d\mathbf{r} = k \int_A^B x dx = \frac{kx_B^2}{2} - \frac{kx_A^2}{2}.$$

Според овој резултат, потенцијалната енергија за еластичната сила може да се пресмета како

$$U = \frac{kx^2}{2}.$$

Во систем во кој постојат и конзервативни и неконзервативни сили,

$$W_{AB} = \Delta K = -\Delta U + \int_A^B \mathbf{F}_{nc} \cdot d\mathbf{r}.$$

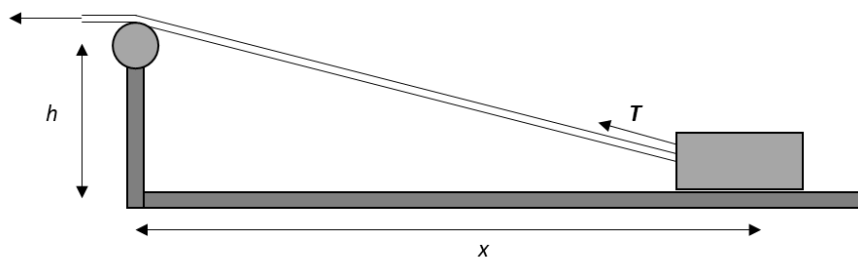
Овој израз може да се запише како

$$\Delta K + \Delta U = \Delta(K + U) = \Delta E = \int_A^B \mathbf{F}_{nc} \cdot d\mathbf{r},$$

каде E е вкупната енергија на системот, збир на потенцијалната и кинетичката енергија. Оваа равенка покажува дека промената на вкупната енергија е определена од работата што ја врши неконзервативната сила врз системот. Во отсуство на неконзервативни сили, добиваме дека нема промена на вкупната енергија со текот на времето, т.е., дека енергијата на системот е константна. Овој резултат е

од голема практична важност при решавање на многу физички проблеми.

Пример 4.1. Објект се влече по површина со константна сила T преку јаже поставено на диск кој може слободно да ротира на висина h како на сликата. На почетокот на движењето, објектот е на координата x . Пресметај ја извршената работа на влечната сила долж мало поместување Δx на почетокот на движењето и долж поголемо поместување од x_1 до x_2 .



Фигура 4.1. Работа извшена при влечење на објект.

Со користење на дефиницијата за извршена работа, може да запишеме

$$\Delta W = \mathbf{T} \cdot \Delta \mathbf{x} = -T \Delta x \cos(\alpha),$$

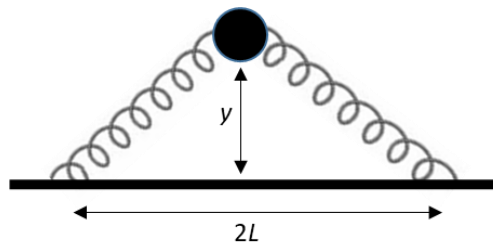
каде α е аголот помеѓу векторите \mathbf{T} и $\Delta \mathbf{x}$. Со користење на тригонометриските релации, добиваме

$$\Delta W = T \Delta x \cos(\alpha) = -T \frac{x}{\sqrt{x^2 + h^2}} \Delta x.$$

При изведувањето на формулава, претпоставивме дека аголот помеѓу силата и поместувањето е непроменлив. Иако ова е валидна апроксимација за мали поместувања, за големо поместување, потребно е добиениот израз да се интегрира. Во таков случај, добиваме

$$W = \int_{x_1}^{x_2} \Delta W = - \int_{x_1}^{x_2} T \frac{x}{\sqrt{x^2 + h^2}} dx = T \left(\sqrt{x_1^2 + h^2} - \sqrt{x_2^2 + h^2} \right).$$

Пример 4.2. Мала топка е поврзана со две идентични пружини со коефициент на еластичност k , како што е прикажано во фигурата. Во хоризонтална положба, пружините се нерастегнати. Пресметај ја вертикалната еластична сила која дејствува на топката кога таа е на растојание y од хоризонталата, работата која ја врши оваа сила при поместување на топката до рамнотежната положба со координата $y = 0$, и потенцијалната енергија на резултантната еластична сила.



Фигура 4.2. Еластична сила и извршена работа врз топка прикачена на две идентични пружини.

Од условот на задачата следи дека должината на секоја од двете пружини во рамнотежната положба е L . Според тоа, кога топката е на растојание y , издолжувањето на пружината е

$$\sqrt{L^2 + y^2} - L.$$

Вертикалната проекција на вкупната сила како резултат на издолжувањето на двете пружини е

$$-2k \left(\sqrt{L^2 + y^2} - L \right) \frac{y}{\sqrt{L^2 + y^2}} = -2ky \left(1 - \frac{L}{\sqrt{L^2 + y^2}} \right).$$

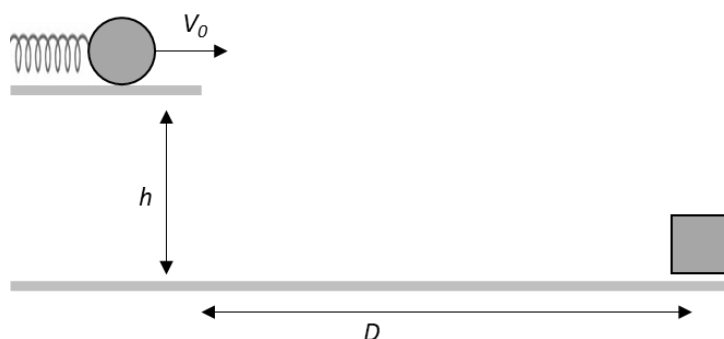
Негативниот знак покажува дека вертикалната сила е насочена надолу кон рамнотежната положба. Користејќи го овој израз, може да ја пресметаме работата која ја врши оваа вкупна еластична сила при движење на топката кон рамнотежната положба:

$$W = \int_y^0 -2ky \left(1 - \frac{L}{\sqrt{L^2 + y^2}} \right) dy = k \left(y^2 + 2L \left(L - \sqrt{L^2 + y^2} \right) \right).$$

За потенцијалната енергија добиваме

$$U(y) = - \int_0^y F_y dy = \int_y^0 F_y dy = W = k \left(y^2 + 2L \left(L - \sqrt{L^2 + y^2} \right) \right).$$

Пример 4.3. Со компресија на еластична пружина, се исфрла хоризонтално топка од висина h , како што е прикажано во фигурата, која треба да ја погоди целта која е на хоризонтално растојание D од пружината. Ако пружината ја компресираме за x_0 , топката паѓа на растојание d подалеку од целта. Пресметај за колкаво x треба да се компресира пружината за топката да падне точно на целта.



Фигура 4.3. Исфрлање на топка од компресирана пружина.

Прво, ќе ја пресметаме потенцијалната енергија на компресираната пружина. Бидејќи во системот топка–пружина не постои неконзервативна сила, енергијата на тој систем е константна со текот на времето. Потенцијалната енергија на пружината може да ја пресметаме со формулата

$$U(x) = - \int_0^x -kx dx = \frac{kx^2}{2}.$$

Од законот за константна енергија, следи дека целата еластична потенцијална енергија се трансферира во кинетичка енергија на топката која што е исфрлена од пружината со почетна брзина V_0 :

$$\frac{kx^2}{2} = \frac{mV_0^2}{2}.$$

Од оваа равенка добиваме

$$x = V_0 \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

При паѓањето на топката врз хоризонталната површина, хоризонталната проекција на брзината е еднаква на почетната брзина бидејќи врз топката дејствува само вертикалната гравитациска сила. Вертикалната брзина линеарно се зголемува од нула на почетокот до максималната брзина при падот врз хоризонталната површина. Бидејќи движењето проектирано на вертикалната оска е рамномерно забрзано со гравитациско забрзување и нулта почетна брзина, може да ја запишеме следнава релација:

$$h = \frac{gt^2}{2}.$$

Од оваа равенка добиваме

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}},$$

каде t е времето на пад на топката. Бидејќи хоризонталната проекција на брзината е константна, хоризонталниот домет кој одговара на поставеноста на целта може да го пресметаме со формулата

$$D = V_0 t = x \sqrt{\frac{k}{m}} \sqrt{\frac{2h}{g}} = x \sqrt{\frac{2hk}{mg}}.$$

Оваа релација покажува дека дометот е линеарно поврзан со компресираноста на пружината. Коефициентот на пропорционалност може да го елиминираме со користење на податокот дека дометот е $D + d$ ако компресираноста е x_0 .

$$D + d = x_0 \sqrt{\frac{2hk}{mg}}.$$

Со делење на претходните две равенки добиваме

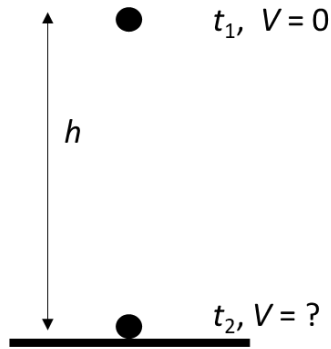
$$\frac{D + d}{D} = \frac{x_0}{x}.$$

Од оваа равенка се добива

$$x = x_0 \frac{D}{D + d}.$$

Оваа релација ни покажува дека доволна е една произволна проба на компресија на пружината за да пресметаме точно колку треба да се компресира пружината за топката да ја погоди целта поставена на растојание D .

Пример 4.4. Топка со маса $m = 0.1 \text{ kg}$ паѓа слободно од висина 1 m без почетна брзина. Со помош на законот за константна вкупна енергија, пресметај ја брзината со која топката ќе удри на земјината површина.



Фигура 4.4. Брзина при слободен пад на топка.

Првиот чекор кај задачи од ваков тип е да се избберат два временски моменти. Со оглед на условите на задачата, првиот момент го дефинираме да биде тој кога објектот почнува да се движи (кога е во најгорната точка), додека вториот момент е пред да удри топката на Земјината површина. Системот е изолиран, така што може да се примени законот за константна вкупна енергија:

$$E_1 = E_2,$$

$$E_1 = E_{k1} + E_{p1},$$

$$E_2 = E_{k2} + E_{p2}.$$

Енергиите кои се вклучени во претходниве равенки ќе ги пресметаме директно од формулите за кинетичка енергија ($\frac{mv^2}{2}$) и потенцијална енергија (mgh). Во горната точка, обектот не се движи, но е на висина, така што има потенцијална енергија, но нема кинетичка, додека во

најдолната точка, има брзина, а со тоа и кинетичка енергија, ама нема потенцијална енергија бидејќи е на висина 0.

$$E_1 = 0 + mgh,$$

$$E_2 = \frac{mv^2}{2} + 0.$$

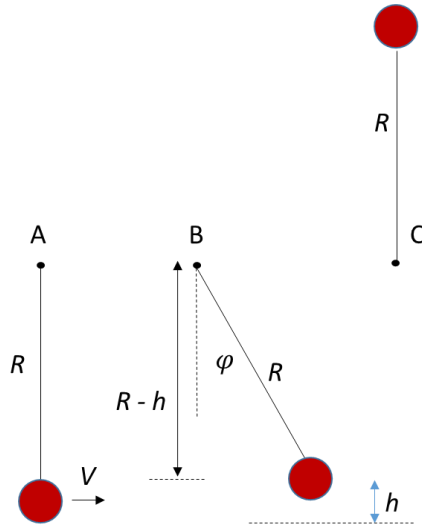
Со изедначување на овие две равенки се добива

$$\frac{mv^2}{2} = mgh.$$

За брзината добиваме

$$v = \sqrt{2gh} = 4.4 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Пример 4.5. Топка е закачена на фиксна точка преку конец со должина $R = 1 \text{ m}$ како во фигурата (A). Со надворешен удар, оваа топка се придвижува на десно со почетна брзина $V = 0.8 \text{ m/s}$. Пресметај за колкав агол (позиција B) ќе се отколни оваа топка пред да почне да се враќа назад, и колкава треба да е нејзината почетна брзина за топката да се искачи до највисоката точка (C) и направи цело завртување без да се врати назад.



Фигура 4.5. Ротација на топка прикачена на конец околу фиксна точка.

Оваа задача ќе ја решиме со законот за константна енергија бидејќи системот е изолиран и нема загуба на енергија. Вкупната енергија на топката во точката А е еднаква на вкупната енергија во точката В. Бидејќи во формулата за потенцијална енергија е вклучена висината на објектот, потребно е да избереме нулта позиција на величината висина. Нултата позиција обично се избира да биде најниската позиција за конкретната задача. Во случајов, сметаме дека висината на топката во позиција А е еднаква на нула. Според тоа, во таа точка, топката има само кинетичка енергија, а потенцијалната енергија е нула.

$$E_A = \frac{mv^2}{2} + 0.$$

Од позиција А до позиција В топката се искачува до некој максимален агол со постепено намалување на брзината до нула. Во таа точка, застанува и почнува да се враќа назад кон точката А. Ако ја оставиме да продолжи да се движи без надворешни сили, топката ќе врши осцилаторни движење со максимално отклонување до позиција В. Во

оваа позиција, брзината е нула. Соодветно, и кинетичката енергија е нула. Потенцијалната енергија е различна од нула бидејќи топката е на висина h од хоризонталата.

$$E_B = 0 + mgh.$$

Ако ги изедначиме енергиите во А и В, добиваме

$$\frac{mv^2}{2} = mgh.$$

Во задачав се бара аголот на отклонување, кој директно е поврзан со висината. Согласно геометријата на задачата,

$$R - h = R \cos\varphi.$$

Од оваа формула ја изразуваме висината и ја заменуваме во претходната формула,

$$\frac{mv^2}{2} = mgR (1 - \cos\varphi).$$

За максималниот агол на отклон на топката добиваме

$$\cos\varphi = 1 - \frac{v^2}{2gR} \approx 0.96.$$

$$\varphi = 16.3^\circ.$$

Следно, ќе пресметаме колкава треба да е почетната брзина за топката да се искачи до најгорната позиција С. Ќе ја искористиме претходната релација:

$$\frac{mv^2}{2} = mgR (1 - \cos\varphi).$$

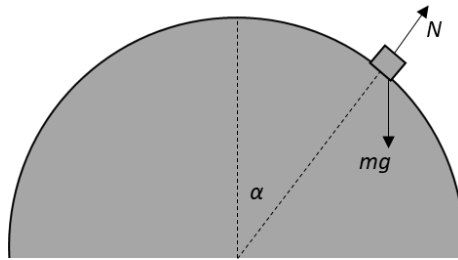
Оваа релација ги поврзува брзината и аголот на отклон. Во случајот С, аголот на отклон е 180° . Со замена на оваа вредност во формулата се добива

$$\frac{v^2}{2} = 2gR,$$

$$v = \sqrt{4gR} = 6.3 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Ова е минималната брзина на топката за да направи цело завртување.

Пример 4.6. Мал правоаголен објект е поставен на врвот на голема топка со радиус R , и од таа позиција е пуштен слободно да паѓа надолу без почетна брзина без триење, како што е прикажано во фигурата. Пресметај при кој агол во однос на вертикалата објектот ќе се одвои од површината на големата топка.



Фигура 4.6. Слободно паѓање по тркалезна површина.

Во моментот на одвојување на објектот од сферната површина, силата на реакција на површината е 0. Според тоа, проекцијата на гравитациската сила долж радијалната насока е еднаква на центрипеталната сила:

$$mg \cos \alpha = \frac{mV^2}{R},$$

каде V е брзината во тој момент, додека α е аголот што го зафаќа објектот со вертикалата. Брзината може да ја пресметаме преку законот

за константна енергија при движењето од врвот до точката на одвојување:

$$mg\Delta h = \frac{mV^2}{2},$$

каде Δh е висинската разлика помеѓу двете точки од интерес. Оваа равенка ја добиваме со користење на условот дека почетната кинетичка енергија на објектот е нула. Со комбинација на претходниве две равенки добиваме

$$R\cos\alpha = 2\Delta h = 2R(1 - \cos\alpha),$$

каде искористивме дека $\Delta h = R(1 - \cos\alpha)$. Од оваа равенка за аголот добиваме

$$\cos\alpha = \frac{2}{3}.$$

Ова решение покажува дека аголот на одвојување е фиксен, независен од геометриските параметри на задачата и масата на објектот.

Пример 4.7. Пресметај ја вкупната потенцијална енергија на едно-димензионален вертикален метален објект со маса m .

Потенцијалната енергија ќе ја пресметаме како определен интеграл, т.е., сума на потенцијалните енергии на бесконечно мали поединечни делови на овој објект:

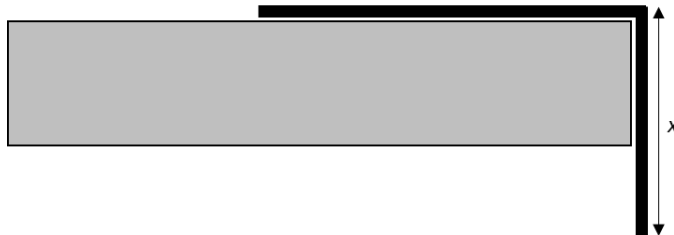
$$U = \int_0^L \lambda gy dy,$$

каде $\lambda = m/L$ е линиската густина на објектот, додека L е неговата должина. Со решавање на интегралот добиваме

$$U = \frac{\lambda g L^2}{2} = \frac{mgL}{2}.$$

Овој резултат покажува дека потенцијалната енергија на овој едно-димензионален објект е еднаква на потенцијалната енергија на материјална точка позиционирана во центарот на маса на едно-димензионалниот објект.

Пример 4.8. Метален ланец со вкупна должина $L = 10 \text{ m}$ е поставен на хоризонтална површина. Коефициентот на статичко (во мирување) триење помеѓу ланецот и површината е $\mu_0 = 0.5$, додека коефициентот на динамично (во движење) триење е $\mu = 0.3$. Пресметај колкав дел од ланецот треба да виси надолу за ланецот да почне да се движи, и колкава ќе биде брзината на ланецот во првиот момент кога целиот ланец ќе биде во вертикална позиција, одвоен од површината. Да се претпостави дека триење постои само помеѓу хоризонталната површина (на масата на која е поставен ланецот) и ланецот.



Фигура 4.7. Паѓање на ланец од хоризонтална површина.

Линиската густина на ланецот ќе ја означиме со λ . Во моментот кога доволен дел од ланецот виси вертикално за да го придвижи, гравитациската сила која дејствува на вертикалниот дел е $\lambda x g$. До овој момент, хоризонталниот дел на ланецот се држи на масата преку

статичката сила на триење. Во моментот од интерес, статичката сила на триење е еднаква на влечната гравитациска сила од вертикалниот дел:

$$\mu_0 \lambda g(L - x) = \lambda x g.$$

Од оваа равенка добиваме

$$\mu_0(L - x) = x,$$

од каде што може да се пресмета должината на висечкиот дел, $x \approx 3.3$ m.

За да ја пресметаме брзината на ланецот во моментот на целосно одвојување, ќе искористиме дека промената на енергијата на ланецот е еднаква на работата што ја врши неконзервативната динамичка сила на триење при движењето на ланецот. Оваа сила за дадена должина на висечкиот дел y е еднаква на $\mu\lambda(L - y)g$.

Во првичниот момент на придвижување на ланецот, неговата енергија е еднаква на потенцијалната енергија. Ако сметаме дека хоризонталната површина е на висина 0, со користење на формулата (добиена во претходниот пример) за потенцијалната енергија на вертикалниот дел сметајќи го како едно-димензионален објект, за вкупната почетна енергија добиваме

$$E_i = \lambda(L - x)g \times 0 - \frac{\lambda x g x}{2} = -\frac{\lambda g x^2}{2} \approx -5.6 \lambda g.$$

Во моментот на целосно одвојување, вкупната енергија е збир на кинетичката и потенцијалната:

$$E_f = -\frac{\lambda L g L}{2} + \frac{\lambda L V^2}{2} = -50 \lambda g + 5 \lambda V^2.$$

Со користење на теоремата дека промената на енергијата е еднаква на извршената работа на силата на триење добиваме

$$-50\lambda g + 5\lambda V^2 + 5.6\lambda g = - \int_{3.3}^{10} 0.3\lambda(10 - y)g dy.$$

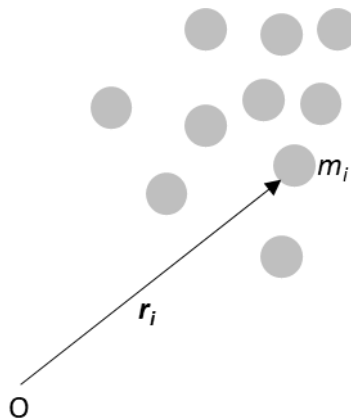
Од оваа равенка добиваме

$$5V^2 = g[44.4 - \int_{3.3}^{10} 0.3(10 - y)dy],$$

$$V \approx 8.6 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

4.2 Системи од многу честички

Движењето на систем составен од повеќе честички е генерално многу посложено од движењето на една честичка. Во такви системи, може да постојат надворешни сили кои не се генерирани од честичките кои припаѓаат на системот, но и внатрешни сили помеѓу честичките на системот. Во многу практични проблеми, од интерес е движењето на таков систем како целина, но често не и движењата на секоја поединечна честичка на системот.



Фигура 4.8. Систем од многу честички.

Ќе покажеме дека постои карактеристична точка, центар на маса, за системот која се користи за проучување на транслаторното движење на системот во целина. Ако се познати масите m_i и координатите r_i на секоја честичка на системот (**Фигура 4.8**), координатите на центарот на маса се дефинирани како

$$\mathbf{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i},$$

каде N е бројот на честички од кои е составен системот. За континуиран систем, сумата преминува во интеграл, и изразот за координатите се трансформира во

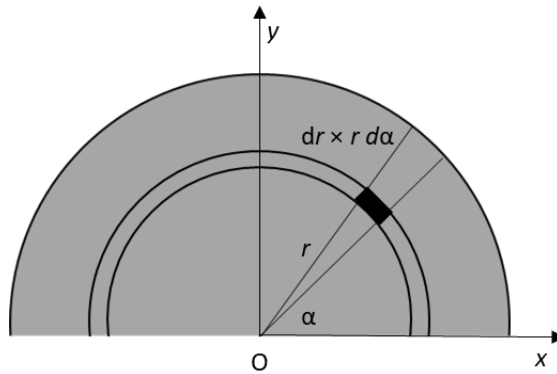
$$\mathbf{r}_c = \frac{\int \mathbf{r} dm}{\int dm},$$

каде интегралот се пресметува по целиот простор зафатен од системот. Со користење на овие равенки, ги добиваме трите координати на центарот на маса за системот кој го проучуваме.

Пример 4.9. Пресметај ги координатите на центарот на маса за половина од дво-димензионален диск со радиус R .

Бидејќи дискот е континуиран објект симетричен во однос на оската y , x -координатата на центарот на маса е 0 , додека y -координатата ќе ја пресметаме со формулата

$$y_c = \frac{\int y dm}{\int dm}.$$



Фигура 4.9. Центар на маса на половина од дво-димензионален диск.

Ако со λ ја означиме површинската густина на дискот, масата на елементарниот дел во поларни координати е $dm = \lambda dr \times r d\alpha$. Со замена во формулата за центар на маса, добиваме

$$y_c = \frac{\int y \lambda dr \times r d\alpha}{\int \lambda dr \times r d\alpha} = \frac{\int r^2 \sin\alpha dr d\alpha}{\int r dr d\alpha} = \frac{\int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin\alpha d\alpha}{\int_0^R r dr \int_0^\pi d\alpha} = \frac{4R}{3\pi}.$$

4.3 Импулс

Формулите за центар на маса го вклучуваат производот на масата и координатата на секоја од честичките од кои е составен системот. Првиот извод на овој производ се нарекува импулс. Вкупниот импулс на системот го дефинираме со

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i,$$

како сума на импулсите на секоја од честичките, $\mathbf{p}_i = m_i \mathbf{v}_i$.

За секоја од честичките може да го запишеме вториот Њутнов закон,

$$m_i \mathbf{a}_i = \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{i,j} + \mathbf{F}_i^e,$$

каде првиот член е збир на силите врз честичката i кои потекнуваат од останатите честички на системот, додека F_i^e е вкупната надворешна сила која дејствува на честичката i . Ако сумираме по сите честички и го запишеме забрзувањето како прв извод на брзината добиваме

$$\sum_i m_i \frac{dv_i}{dt} = \sum_{j \neq i} F_{i,j} + \sum_i F_i^e.$$

Согласно третиот Њутнов закон, збирот на силата од j -та честичка врз i -та честичка и силата од i -та честичка врз j -та честичка е нула. Според ова, силите во сумата во првиот член меѓусебно се елиминираат, така што таа сума е нула. Ако вкупната надворешна сила ја означиме со F^e , ја добиваме следнава равенка

$$\frac{dP}{dt} = F^e.$$

Овој израз може да се запише во следнава форма:

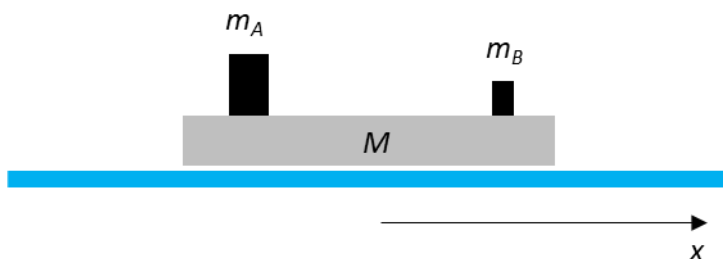
$$M \frac{dV_c}{dt} = F^e,$$

каде M е вкупната маса на системот, додека V_c е брзината на центарот на маса. Оваа равенка покажува дека транслаторното движење на системот може целосно да се опише ако системот го разгледуваме како материјална точка со маса M и со координати еднакви на координатите на центарот на маса. Во овој случај, силата која дејствува на таква репрезентативна материјална точка е збирот од надворешни сили на секоја од честичките од кои е составен системот. Оваа формула ја демонстрира важноста на центарот на маса на систем од многу честички во поглед на неговото транслаторно движење.

Во случај на отсуство на вкупна надворешна сила, од релацијата $\frac{dP}{dt} = F^e$, следи дека вкупниот импулс на системот е константна величина со текот на времето. Овој резултат е од голема практична важност при

решавање на многу физички проблеми, заедно со законите за константна вкупна енергија за изолирани системи врз кои не дејствуваат надворешни сили.

Пример 4.10. Родител и дете со маси $m_A = 80 \text{ kg}$ и $m_B = 50 \text{ kg}$ се наоѓаат на кајче со маса $M = 40 \text{ kg}$ на мирна вода. За колку ќе се помести кајчето на водената површина ако родителот и детето си ги разменат местата кои се на растојание $2L = 2 \text{ m}$ едно од друго, и се подеднакво оддалечени од центарот на кајчето.



Фигура 4.10. Движење на водена површина.

Во оваа задача, ќе искористиме дека центарот на маса не се движи при движењето на поединечните елементи на системот затоа што нема надворешни сили врз системот. Координатите на центарот на кајчето пред и по поместувањето ќе ги означиме со x_1 и x_2 , соодветно.

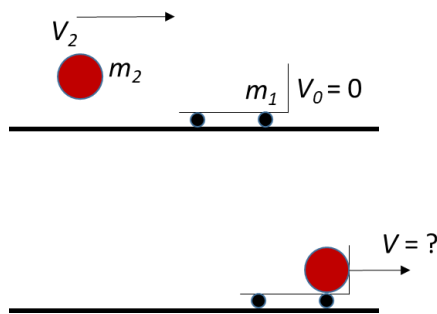
Бидејќи координатата на центарот на маса е иста пред и по поместувањето, може да ја запишеме следнава равенка:

$$m_A(x_1 - L) + m_B(x_1 + L) + Mx_1 = m_B(x_2 - L) + m_A(x_2 + L) + Mx_2.$$

Од оваа равенка, за поместувањето на кајчето $d = x_1 - x_2$ добиваме

$$d = \frac{2L(m_A - m_B)}{m_A + m_B + M} = 0.35 \text{ m}.$$

Пример 4.11. Подвижен објект со маса $m_1 = 10 \text{ kg}$ се наоѓа на рамна површина без триење. Во него удира мала топка со маса $m_2 = 0.2 \text{ kg}$ која се движи со брзина $V_2 = 50 \text{ m/s}$. Пресметај ја брзината V на системот топка–подвижен објект кои после судирот продолжуваат да се движат заедно како во фигурата.



Фигура 4.11. Размена на импулс при судир на два објекти.

Во фигурата се илустрирани два карактеристични временски моменти, пред судирот (горен панел) и по судирот (долен панел). После судирот, топката и подвижниот објект се движат како еден систем со иста брзина V и маса $m_1 + m_2$. Бидејќи системот е изолиран, задачава може да се реши преку законот за константен импулс со текот на времето.

Задачава е типичен пример за нееластичен судир каде се губи енергија. Големината на оваа загуба на енергија не е позната. Според тоа, законот за константна енергија не е применлив. Законот за константен импулс може да се примени бидејќи на системот не дејствуваат надворешни сили.

Согласно овој закон, вкупниот импулс пред судирот е еднаков на вкупниот импулс по судирот. Задачата е едно-димензионална, така што потребно е проектирање само долж хоризонталната оска.

$$p_{\text{пред}} = p_{\text{по}},$$

$$p_{\text{пред}} = m_1 \times 0 + m_2 V_2,$$

$$p_{\text{по}} = (m_1 + m_2)V.$$

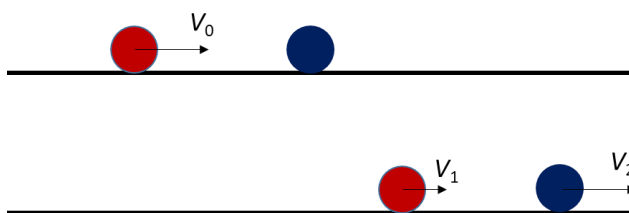
Со изедначување на овие две равенки добиваме

$$m_2 V_2 = (m_1 + m_2)V,$$

$$V = \frac{m_2 V_2}{m_1 + m_2} = 0.98 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Овој резултат покажува дека брзината на системот е многу помала од почетната брзина на топката, затоа што масата на подвижниот објект е многу поголема од масата на топката.

Пример 4.12. Црвена топка се движи на десно со брзина V_0 . Во еден момент, удира во сина топка со иста маса која е во состојба на мирување на почетокот. Пресметај ги брзините на двете топки по судирот. Да се претпостави дека судирот е апсолутно еластичен, т.е., нема загуба на енергија.



Фигура 4.12. Еластичен судир на две топки на хоризонтална површина.

Овој систем е типичен пример за изолиран систем за кој може да се применат законите за константен импулс и константна енергија. Вкупната енергија пред судирот е

$$E_{\text{пред}} = \frac{mv_0^2}{2}.$$

Вкупната енергија по судирот е

$$E_{\text{по}} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2}.$$

Со изедначување на овие две енергии се добива

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2},$$

$$v_0^2 = v_1^2 + v_2^2.$$

Следно, ќе го примениме законот за константен импулс. Импулсот на системот пред судирот е

$$p_{\text{пред}} = mv_0.$$

Импулсот на системот по судирот е

$$p_{\text{по}} = mv_1 + mv_2.$$

Со изедначување на овие две равенки се добива

$$mv_0 = mv_1 + mv_2,$$

$$v_0 = v_1 + v_2.$$

Ако ја квадрираме оваа равенка се добива

$$v_0^2 = v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2.$$

Со оглед на релацијата помеѓу квадратите на брзините добиена погоре со користење на законот за константна енергија, следи дека

$$2v_1v_2 = 0.$$

Ова значи дека едната брзина, v_1 или v_2 , е еднаква на нула.

Под претпоставка дека $v_2 = 0$, од релацијата помеѓу брзините добиена со користење на законот за константен импулс следи $v_1 = v_0$. Ова решение е математички точно, но не одговара на конкретна задача, затоа што во ваков случај брзините на првата и втората топка по судирот се еднакви на нивните брзини пред судирот. Ова значи дека топките се разминуваат наместо да се судрат.

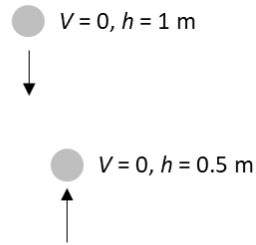
Во вториот случај, кога $v_1 = 0$, од релацијата помеѓу брзините следи $v_2 = v_0$. Ова е решението на задачата, кое покажува дека втората топка која на почетокот не се движи, по судирот ќе се движи со истата брзина што ја има првата топка пред судирот. Првата топка по судирот не се движи. При овој апсолутно еластичен судир, имаме целосен трансфер на кинетичка енергија и импулс од првата на втората топка.

Пример 4.13. Топка со маса $m = 1 \text{ kg}$ е пуштена да падне слободно од висина $h = 1 \text{ m}$. По одбивањето од површината, топката отскокнува до висина $h/2$. Колкава е просечната сила со која површината дејствува на топката ако топката е во контакт со површината во временски интервал од $\Delta t = 10 \text{ ms}$.

Просечната сила при контактот може да ја пресметаме преку промената на импулс на топката за време на контактот:

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{m(v_a - v_b)}{\Delta t},$$

каде v_b и v_a се брзините на топката пред и по одбивањето од површината.



Фигура 4.13. Одбивање на топка од рамна површина.

Овие брзини може да ги пресметаме преку соодветните кинетички енергии пред и по одбивањето. За да ги пресметаме кинетичките енергии, ќе го искористиме законот за константна енергија, два пати, еднаш при движењето пред одбивањето, и втор пат при движењето од одбивањето до искачувањето до половина од првичната висина. И во двата случаи, со оглед на отсуството на неконзервативни сили, кинетичката енергија е еднаква на соодветната потенцијална енергија:

$$\frac{mv_b^2}{2} = mgh,$$

$$\frac{mv_a^2}{2} = \frac{mgh}{2}.$$

Со замена на овие брзини, за просечната сила добиваме

$$F = \frac{m\sqrt{gh}(\sqrt{2} + 1)}{\Delta t}.$$

Пример 4.14. Изведи ја равенката на движење за ракета од која се исфрла гориво со релативна брзина v_r во однос на ракетата.

Брзината на ракетата во однос на Земјата ќе ја означиме со v , додека моменталната маса на ракетата вклучувајќи го горивото ќе ја означиме со m . Бидејќи системот ракета–гориво е изолиран, вкупниот импулс е константна величина со текот на времето. Пред исфрлање на гориво со маса $-dm$, импулсот на системот е mv . По исфрлањето, ракетата има импулс

$$(m + dm)(v + dv),$$

додека горивото исфрлено со брзина v_g во однос на земјата, $v_g = v - v_r$, има импулс еднаков на

$$-v_g dm = -(v - v_r)dm.$$

Од законот за константен импулс добиваме

$$(m + dm)(v + dv) + (v_r - v)dm = mv.$$

Со занемарување на членот $dm dv$, изразот се трансформира во

$$mdv + v_r dm = 0.$$

Од овој израз добиваме

$$m \frac{dv}{dt} = -v_r \frac{dm}{dt}.$$

Во оваа диференцијална равенка, $-\frac{dm}{dt}$ ја дефинира масата на исфрлено гориво во единица време, која ќе ја означиме со r . Во случај на константни r и v_r , добиваме

$$-\frac{dm}{dt} = r,$$

од каде следи

$$m = m_0 - rt,$$

каде m_0 е почетната маса на системот. Оваа равенка покажува дека масата линеарно се намалува со текот на времето во овој случај. За брзината на ракетата добиваме

$$(m_0 - rt) \frac{dv}{dt} = rv_r.$$

Овој израз може да се трансформира во

$$dv = rv_r \frac{dt}{(m_0 - rt)} = \frac{rv_r}{m_0} \frac{dt}{\left(1 - \frac{rt}{m_0}\right)}.$$

Со интегрирање добиваме

$$\frac{\Delta v}{v_r} = -\ln\left(1 - \frac{rt}{m_0}\right) = \ln\left(\frac{1}{1 - \frac{rt}{m_0}}\right).$$

Во случај кога $\frac{rt}{m_0} \ll 1$, добиваме

$$\frac{\Delta v}{v_r} \approx \frac{rt}{m_0},$$

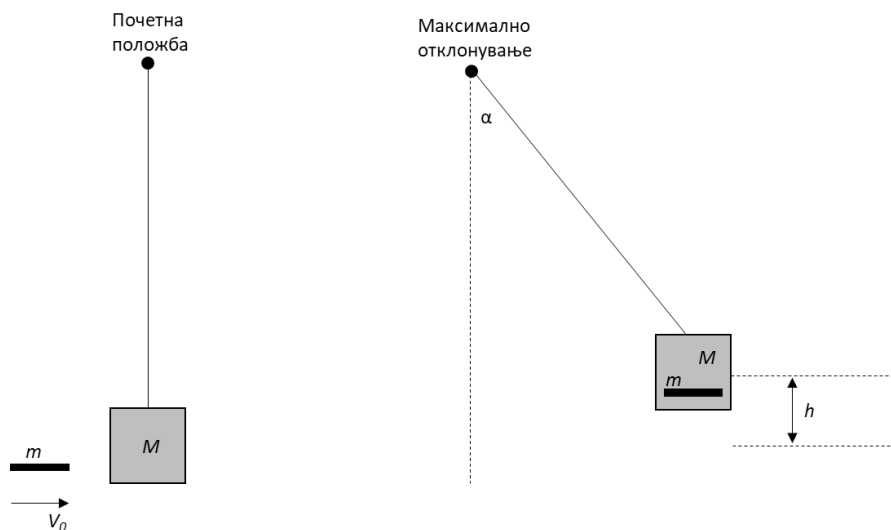
од каде следи

$$\frac{\Delta v}{t} \approx \frac{rv_r}{m_0}.$$

Овој израз покажува дека во почетокот на движењето, кога $t \ll \frac{m_0}{r}$, ракетата се движи со константно забрзување еднакво на $\frac{rv_r}{m_0}$.

Пример 4.15. Коцка со маса M е вертикално прикачена на тенка метална прачка со должина R и занемарлива маса која може слободно да ротира околу точката на прицврстување. Во коцката удира тенок објект со

брзина V_0 и притоа се заглавува во коцката. Пресметај го аголот на максимално отклонување на системот коцка–тенок објект.



Фигура 4.14. Отклонување на коцка по судир на објект.

Оваа задача ќе ја решиме во два дела. Прво, ќе ја пресметаме почетната брзина со која ќе се движат заедно коцката и тенкиот објект по судирот, а потоа ќе пресметаме за колкав агол ќе се отклони овој систем знаејќи ја неговата почетна брзина.

За да ја пресметаме почетната брзина на системот по судирот, ќе го искористиме законот за константен импулс пред и по судирот:

$$mv_0 = (m + M)v,$$

каде v е почетната брзина на заедничкото движење на системот коцка–тенок објект. Од оваа равенка добиваме

$$v = \frac{mv_0}{(m + M)}.$$

По судирот, системот може да го третираме како еден објект со маса $m + M$. Според тоа, ќе го запишеме законот за константна енергија во првичниот момент по судирот и во моментот на максимално отклонување:

$$\frac{(m + M)v^2}{2} = (m + M)gh,$$

каде h е максималната висина која ја постигнува овој систем по судирот. Со комбинирање на претходните две равенки, за висината добиваме

$$h = \frac{v^2}{2g} = \frac{v_0^2 m^2}{2g(m + M)^2}.$$

Согласно геометријата на фигурата, може да запишеме

$$R - h = R \cos \alpha.$$

Од оваа равенка, за максималниот агол на отклонување добиваме

$$\cos \alpha = 1 - \frac{v_0^2 m^2}{2gR(m + M)^2}.$$

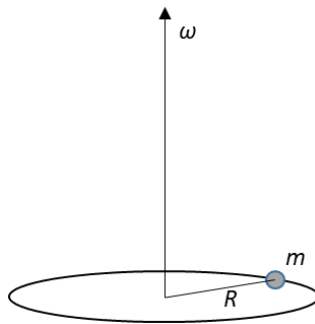
5. РОТАЦИОНО ДВИЖЕЊЕ

5.1 Момент на инерција

Разгледуваме материјална точка со маса m која е во ротационо движење со радиус R околу z -оската со аголна брзина ω . Кинетичката енергија на објектот е

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\omega^2 R^2}{2} = \frac{I\omega^2}{2},$$

каде $I = mR^2$ се нарекува момент на инерција.



Фигура 5.1. Ротационо движење на објект со маса m .

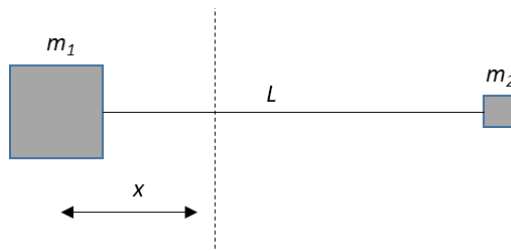
Со оглед на тоа што аголната брзина при ротационо движење е аналог на линиската брзина при транслаторно движење, согласно формулата за кинетичката енергија, моментот на инерција при ротационо движење е аналог на масата при транслаторно движење. За систем од многу честички кои ротираат со иста аголна брзина околу иста оска на ротација, вкупната кинетичка енергија е

$$E_k = \sum_i E_{k i} = \sum_i \frac{m_i r_i^2}{2} \omega^2 = \frac{I\omega^2}{2},$$

каде $I = \sum_i m_i r_i^2$ е вкупниот момент на инерција на системот, m_i е масата на i -та честичка, и r_i е растојанието од оската на ротација до i -та честичка на системот. Овој резултат покажува дека моментот на инерција за ваков систем е збир од моментите на инерција на поединечните честички, аналогно на адитивното својство на масата при транслаторно движење на систем од многу честички. Ако системот е континуиран, сумата се трансформира во интеграл:

$$I = \int r^2 dm.$$

Пример 5.1. Две коцки со различни маси m_1 и m_2 се поврзани со недеформабилна метална жица со занемарливо мала маса и должина L . Околу која оска треба да ротира системот од две коцки за минимален момент на инерција?



Фигура 5.2. Момент на инерција на две коцки со различни маси.

Моментот на инерција на овој систем од два објекти е

$$I(x) = m_1 x^2 + m_2 (L - x)^2.$$

За да го најдеме x кој го минимизира моментот на инерција, изразот го диференцираме по x :

$$I'(x) = 2m_1 x - 2m_2 (L - x).$$

Првиот извод е нула кога

$$m_1 x = m_2 (L - x),$$

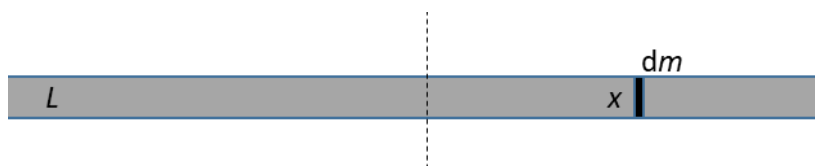
$$x = \frac{m_2 L}{m_1 + m_2}.$$

Оваа равенка покажува дека моментот на инерција се минимизира кога оската на ротација поминува низ центарот на маса на системот. Со замена, за минималниот момент на инерција добиваме

$$I(x) = m_1 \left(\frac{\mu L}{m_1} \right)^2 + m_2 \left(\frac{\mu L}{m_2} \right)^2 = \mu L^2,$$

каде $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$.

Пример 5.2. Пресметај го моментот на инерција на тенка метална прачка со должина L и маса M околу оска на ротација која поминува нормално низ нејзиниот центар.

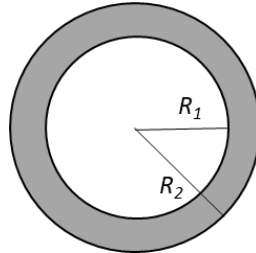


Фигура 5.3. Момент на инерција на тенка метална прачка.

Моментот на инерција за ваков објект е

$$I = \int x^2 dm = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \frac{M dx}{L} = 2 \frac{M}{L} \int_0^{L/2} x^2 dx = \frac{ML^2}{12}.$$

Пример 5.3. Пресметај го моментот на инерција на шуплив цилиндер со внатрешен и надворешен радиус R_1 и R_2 , маса M , и должина L околу централната оска.



Фигура 5.4. Момент на инерција на шуплив цилиндер.

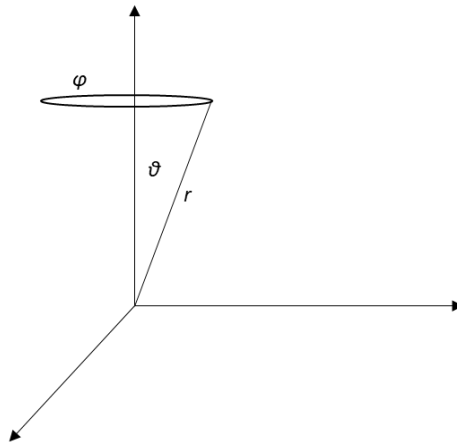
Моментот на инерција за овој објект е

$$I = \int r^2 dm = \rho \int r^2 r dr d\varphi dz = \rho \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr \int_0^L dz \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{2\pi L \rho (R_2^4 - R_1^4)}{4}$$

$$= \frac{\pi L \rho (R_2^2 - R_1^2)(R_2^2 + R_1^2)}{2} = \frac{M(R_2^2 + R_1^2)}{2}.$$

Интегрирањето е извршено во цилиндрични координати со оглед на геометријата на задачата. ρ е густината на цилиндерот, која е изразена преку масата и волуменот на цилиндерот.

Пример 5.4. Пресметај го моментот на инерција на полна топка со маса M и радиус R околу оска на ротација која поминува низ нејзиниот центар.



Фигура 5.5. Сферни координати за пресметување на моментот на инерција за топка.

Во овој случај, моментот на инерција ќе го пресметаме со интегрирање во сферни координати, каде елементарниот волумен е

$$dV = r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi.$$

За моментот на инерција добиваме

$$\begin{aligned} I &= \int (r \sin\theta)^2 dm = \rho \int_0^R r^4 dr \int_0^\pi (\sin\theta)^3 d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \rho \frac{R^5}{5} \frac{4}{3} 2\pi = \frac{3M}{4\pi R^3} \frac{R^5}{5} \frac{4}{3} 2\pi \\ &= \frac{2}{5} MR^2. \end{aligned}$$

Пример 5.5. Пресметај го моментот на инерција за празна сфера со маса M и радиус R околу оска на ротација која поминува низ нејзиниот центар.

Слично како за претходниот пример, ќе користиме сферни координати. Површинската густина на сферата е

$$\delta = \frac{M}{4\pi R^2}.$$

За моментот на инерција во сферни координати добиваме

$$\begin{aligned} I &= \delta \int (R\sin\theta)^2 R\sin\theta \, d\varphi \, R \, d\theta = \delta R^4 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} (\sin\theta)^3 d\theta = \frac{M}{4\pi R^2} R^4 2\pi \frac{4}{3} \\ &= \frac{2}{3} MR^2. \end{aligned}$$

Теорема за паралелна оска

Ќе изведеме формула со која може да се пресмета моментот на инерција за произволен објект околу произволна оска паралелна на оска која поминува низ центарот на маса на објектот и оддалечена на растојание d од неа.

За поедноставно изведување на формулата, ќе го поставиме координатниот почеток на оската околу која го пресметуваме моментот на инерција:

$$I = \int r^2 dm.$$

Дефинираме $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{d}$, каде \mathbf{d} е векторот кој го дефинира центарот на маса, \mathbf{r} ја дефинира позицијата на dm во однос на оската околу која го пресметуваме моментот на инерција, и \mathbf{R} ја дефинира позицијата на dm во однос на оската која поминува низ центарот на маса. Бидејќи двете оски од интерес се паралелни, овие три вектори се копланарни, т.е., припаѓаат на иста рамнина. Со замена во интегралот добиваме

$$I = \int r^2 dm = \int (\mathbf{R} + \mathbf{d})^2 dm = \int \mathbf{R}^2 dm + Md^2 + 2 \int \mathbf{R}\mathbf{d} dm,$$

каде M е вкупната маса на објектот. Со оглед на дефиницијата за центар на маса, и бидејќи d е нормален на оската на ротација која поминува низ центарот на маса, последниот член во претходниот израз е нула. Според тоа, добиваме

$$I = I_c + Md^2.$$

Оваа формула покажува дека моментот на инерција околу произволна паралелна оска може да се пресмета со додавање на Md^2 на моментот на инерција околу оската која поминува низ центарот на маса.

Теорема за нормална оска за планарни објекти

Во овој случај, објектот целосно припаѓа на една рамнина, на пример на x - y рамнината. Моментот на инерција околу z -оската е

$$I_z = \int (x^2 + y^2)dm.$$

Моментите на инерција околу другите две оски се

$$I_x = \int (z^2 + y^2)dm = \int y^2 dm,$$

$$I_y = \int (z^2 + x^2)dm = \int x^2 dm.$$

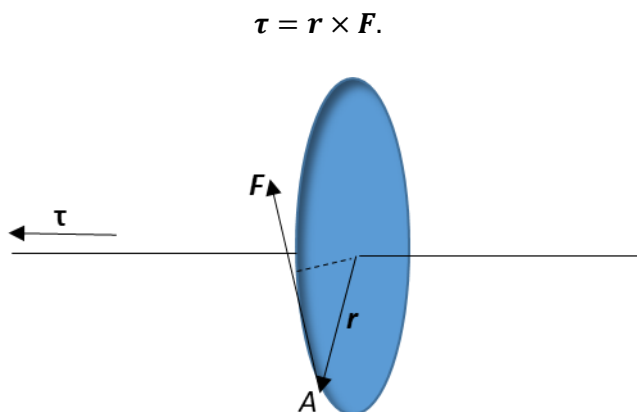
Со замена добиваме

$$I_z = I_x + I_y.$$

Овие две теореми се од голема практична важност затоа што може да го поедностават решавањето на интегралите за моментите на инерција.

5.2 Момент на сила

Разгледуваме диск кој може да ротира околу хоризонталната оска која поминува низ неговиот центар, како што е прикажано во **Фигура 6**. Ако врз дискот дејствува сила \mathbf{F} во точката А чија положба е дефинирана со векторот \mathbf{r} , моментот на оваа сила се дефинира преку векторскиот производ



Фигура 5.6. Момент на сила.

Компонентата на \mathbf{r} нормална на силата \mathbf{F} се нарекува крак на силата, означен со испрекинатата линија на фигурата. Во едноставниот случај на движење на материјална точка по кружна патека со радиус R во x - y рамнината, во поларни координати, брзината има само тангенцијална компонента

$$v_{\theta} = R\dot{\theta},$$

додека забрзувањето во општ случај има две компоненти, радијална и тангенцијална,

$$a_{\theta} = R\ddot{\theta},$$

$$a_r = -R\dot{\theta}^2.$$

Со замена на овие изрази, за моментот на сила добиваме

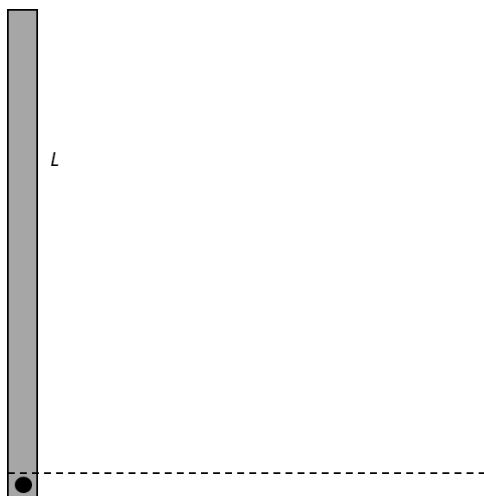
$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = R\hat{\mathbf{r}} \times (F_\theta\hat{\boldsymbol{\theta}} + F_r\hat{\mathbf{r}}) = RF_\theta\hat{\mathbf{z}},$$

каде $\hat{\mathbf{r}}$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, и $\hat{\mathbf{z}}$ се единечните вектори долж радијалната насока, тангенцијалната насока, и z-оската, соодветно. Од овој израз следи

$$\tau_z = RF_\theta = mR^2\ddot{\theta} = I\varepsilon,$$

каде ε е аголното забрзување $\ddot{\theta}$. Овој израз е аналог на вториот Њутнов закон за ротационо движење, каде улогата на сила, маса, и забрзување ја имаат моментот на сила, моментот на инерција, и аголното забрзување, соодветно.

Пример 5.6. Метална униформна прачка е прикачена вертикално со долниот дел околу кој може слободно да ротира. Прачката почнува да ротира со нулта почетна брзина. Пресметај ги аголната брзина, аголното забрзување на центарот на маса, и реакционата сила врз точката на ротација кога прачката е во хоризонталната положба.



Фигура 5.7. Ротација на униформна метална прачка.

Моментот на инерција на тенка метална прачка околу центарот на маса е

$$I_c = \frac{ML^2}{12}.$$

Од теоремата за паралелна оска, за моментот на ротација околу едната од двете гранични точки добиваме

$$I = I_c + M \left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{ML^2}{12} + \frac{ML^2}{4} = \frac{ML^2}{3}.$$

За да ја пресметаме аголната брзина во хоризонталната положба, ќе го примениме законот за константна енергија во две позиции, почетната вертикална и хоризонталната:

$$E_B = E_A,$$

$$\frac{MgL}{2} + 0 = 0 + \frac{I\omega^2}{2}.$$

Со замена на добиениот момент на инерција добиваме

$$\omega = \sqrt{\frac{3MgL}{ML^2}} = \sqrt{\frac{3g}{L}}.$$

Аголното забрзување на центарот на маса ќе го добиеме со користење на равенката

$$\tau_z = I\varepsilon = \frac{ML^2}{3}\varepsilon.$$

Бидејќи само гравитационата сила придонесува кон моментот на сила со крак $\frac{L}{2}$, добиваме

$$Mg \frac{L}{2} = \frac{ML^2}{3}\varepsilon,$$

$$\varepsilon = \frac{3g}{2L}.$$

За тангенцијалното и центрипеталното забрзување на центарот на маса добиваме

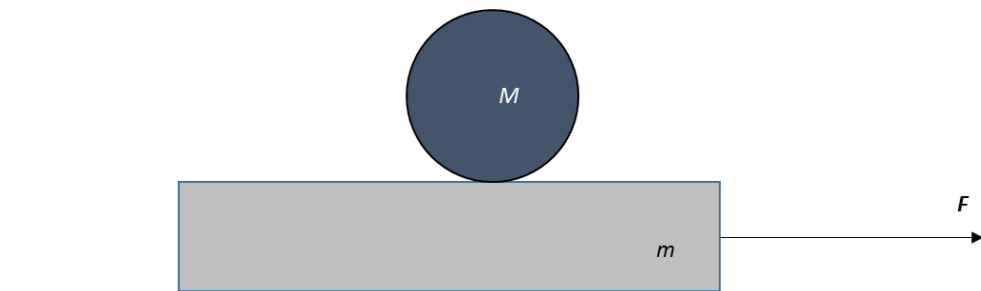
$$a_{\theta} = \frac{L}{2}\varepsilon = \frac{3g}{4},$$

$$a_r = -\frac{L}{2}\omega^2 = -\frac{3g}{2}.$$

Радијалната компонентна е одговорна за реакциската сила врз точката на ротација:

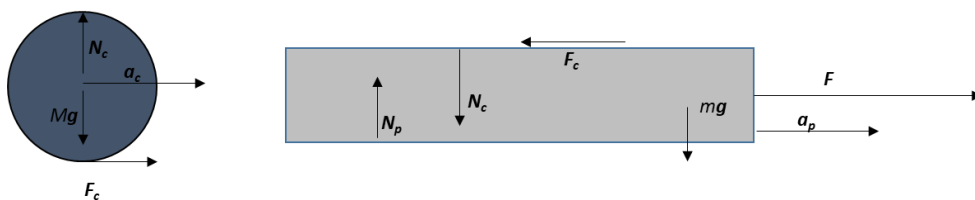
$$F_r = \frac{3Mg}{2}.$$

Пример 5.7. Цилиндер со маса M и радиус R се наоѓа во мирување на правоаголен објект со маса m . На правоаголниот објект дејствуваме со хоризонтална сила F . Под претпоставка дека нема пролизгување помеѓу правоаголниот објект и цилиндерот, пресметај го забрзувањето на правоаголниот објект, аголното забрзување на цилиндерот, транслаторното забрзување на цилиндерот, транслаторното забрзување на цилиндерот во однос на правоаголниот објект, и контактната сила помеѓу цилиндерот и правоаголниот објект.



Фигура 5.8. Движење на цилиндер на површина на правоаголен објект под дејство на надворешна сила.

Дијаграмот на сили кои дејствуваат врз цилиндерот (означен со “с”) и правоаголниот објект (означен со “р”) е прикажан во **Фигура 5.9**.



Фигура 5.9. Дијаграм на сили врз двата објекти.

Со оглед на отсуството на пролизгување, разгледувајќи ја контактната точка помеѓу цилиндерот и правоаголниот објект, може да запишеме

$$a_p = a_c + R\varepsilon,$$

каде a_p , a_c , и ε се забрзувањето на правоаголниот објект, транслаторното забрзување на цилиндерот, и аголното забрзување на цилиндерот, соодветно.

Разгледувајќи ги вертикалните компоненти за цилиндерот, добиваме

$$N_c = Mg.$$

Забрзувањето на цилиндерот е резултат на дејството на контактната сила помеѓу него и правоаголниот објект:

$$F_c = Ma_c.$$

Разгледувајќи го ротационото движење на цилиндерот добиваме

$$F_c R = I\varepsilon,$$

каде моментот на инерција за цилиндерот е $I = \frac{MR^2}{2}$. Со замена, добиваме

$$F_c = \frac{MR\varepsilon}{2}.$$

Разгледувајќи ги хоризонталните компоненти за правоаголниот објект, добиваме

$$F - F_c = ma_p.$$

За вертикалните компоненти добиваме

$$N_p = N_c + mg = (m + M)g.$$

Со замена на претходните изрази во првата равенка која ги поврзува забрзувањата добиваме

$$\frac{F - F_c}{m} = \frac{F_c}{M} + R\varepsilon,$$

$$\frac{F - \frac{MR\varepsilon}{2}}{m} = \frac{R\varepsilon}{2} + R\varepsilon,$$

$$\varepsilon = \frac{2F}{R(M + 3m)}.$$

Со замена, за контактната сила добиваме

$$F_c = \frac{MR}{2} \frac{2F}{R(M + 3m)} = \frac{MF}{M + 3m}.$$

За транслаторното забрзување на цилиндерот добиваме

$$a_c = \frac{F_c}{M} = \frac{F}{M + 3m}.$$

За забрзувањето на правоаголниот објект добиваме

$$a_p = a_c + R\varepsilon = \frac{F}{M + 3m} + \frac{2F}{M + 3m} = \frac{3F}{M + 3m}.$$

Во однос на правоаголниот објект, транслаторното забрзување на цилиндерот е

$$a_{cp} = a_c - a_p = \frac{F}{M + 3m} - \frac{3F}{M + 3m} = -\frac{2F}{M + 3m}.$$

Овој резултат покажува дека цилиндерот се движи кон левата страна на правоаголниот објект со ротација обратна од ротацијата на стрелките на часовникот.

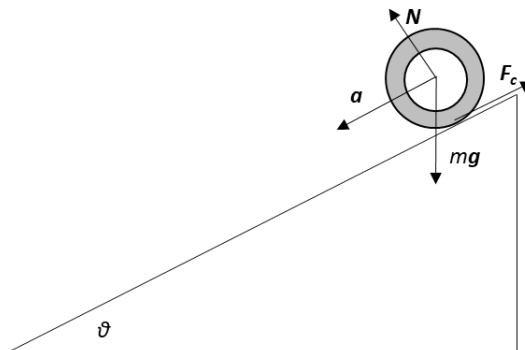
Пример 5.8. Шуплив цилиндер со маса M , внатрешен радиус R_1 , и надворешен радиус R_2 се тркала без пролизгување по наклонета рамнина со агол на наклон θ . Пресметај го забрзувањето на центарот на маса на цилиндерот.

Дијаграмот на сили е прикажан во фигурата. Долж наклонетата рамнина, може да ја запишеме следнава равенка

$$mg\sin\theta - F_c = ma.$$

За нормалните компоненти добиваме

$$N - mg\cos\theta = 0.$$



Фигура 5.10. Тркалање на цилиндер по наклонета рамнина.

За ротационото движење на цилиндерот може да ја запишеме следнава равенка

$$\tau = F_c R_2 = I \varepsilon = \frac{m(R_1^2 + R_2^2)}{2} \varepsilon.$$

Со оглед на отсуството на пролизгување на контактот,

$$a = R_2 \varepsilon.$$

Со замена добиваме

$$a = R_2 \frac{2F_c R_2}{m(R_1^2 + R_2^2)} = \frac{2}{\left(\frac{R_1^2}{R_2^2} + 1\right)} (g \sin \theta - a),$$

$$a = \frac{2g \sin \theta}{3 + \frac{R_1^2}{R_2^2}}.$$

Во граничните случаи на полн цилиндер и многу тенок шуплив цилиндер, добиваме $a = \frac{2g \sin \theta}{3}$ и $\frac{g \sin \theta}{2}$, соодветно. Овој резултат покажува дека полниот цилиндер побрзо ќе се стркала по наклонетата рамнина. Добиената формула покажува дека забрзувањето на центарот на маса не зависи од масата на цилиндерот, туку е определено од аголот на наклонетата рамнина и од односот помеѓу внатрешниот и надворешниот радиус на цилиндерот.

5.3 Момент на импулс

Моментот на импулс за материјална точка е дефиниран со векторскиот производ

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p},$$

каде \mathbf{r} е векторот на положба додека \mathbf{p} е импулсот на честичката. Ако честичката врши кружно движење со радиус R , за моментот на импулс добиваме

$$L = Rp = Rmv = RmR\omega = I\omega.$$

Оваа равенка покажува дека моментот на импулс за ротационо движење е аналогна величина на импулсот за транслаторно движење.

За систем од многу честички, моментот на импулс е сумата од поединечните моменти на импулс на секоја од честичките:

$$L = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i.$$

Во многу практични примени, од голема важност е да се изрази моментот на импулс преку компонента што зависи од движењето на центарот на маса и од друга компонента што е определена од движењата на честичките во однос на центарот на маса. За таа цел, дефинираме нови координати $\boldsymbol{\rho}_i$ на честичките во однос на центарот на маса (\mathbf{r}_c):

$$\mathbf{r}_i = \boldsymbol{\rho}_i + \mathbf{r}_c.$$

Со замена, добиваме

$$\begin{aligned} L &= \sum_i (\boldsymbol{\rho}_i + \mathbf{r}_c) \times m_i(\dot{\boldsymbol{\rho}}_i + \dot{\mathbf{r}}_c) \\ &= \sum_i m_i(\boldsymbol{\rho}_i \times \dot{\boldsymbol{\rho}}_i + \boldsymbol{\rho}_i \times \dot{\mathbf{r}}_c + \mathbf{r}_c \times \dot{\boldsymbol{\rho}}_i + \mathbf{r}_c \times \dot{\mathbf{r}}_c) = \sum_i m_i(\boldsymbol{\rho}_i \\ &\quad \times \dot{\boldsymbol{\rho}}_i) + \sum_i m_i \boldsymbol{\rho}_i \times \dot{\mathbf{r}}_c + \mathbf{r}_c \times \sum_i m_i \dot{\boldsymbol{\rho}}_i + \mathbf{r}_c \times \dot{\mathbf{r}}_c \sum_i m_i. \end{aligned}$$

Од дефиницијата за центар на маса следи дека вториот и третиот член се нула. Според тоа, добиваме

$$L = \sum_i m_i(\boldsymbol{\rho}_i \times \dot{\boldsymbol{\rho}}_i) + M\mathbf{r}_c \times \dot{\mathbf{r}}_c.$$

Оваа равенка покажува дека вкупниот момент на импулс е еднаков на збирот на моментот на импулс на центарот на маса сметајќи го како

материјална точка со маса еднаква на вкупната маса на системот и моментот на импулс на честичките во однос на центарот на маса.

За првиот извод на моментот на импулс по времето добиваме

$$\dot{\mathbf{L}} = \sum_i (\dot{\mathbf{r}}_i \times \mathbf{p}_i + \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{p}}_i).$$

Векторите во првиот член се колинеарни. Според тоа, векторскиот производ во првиот член е нула. За изводот на моментот на импулс добиваме

$$\dot{\mathbf{L}} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{p}}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times \left(\mathbf{F}_i^H + \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{i,j} \right),$$

каде силата на секоја од честичките е разложена на надворешната компонента \mathbf{F}_i^H и збирот на силите од другите честички на системот.

За секои две честички, со оглед на третиот Њутнов закон, може да запишеме

$$\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ji} = (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_{ij} = 0,$$

бидејќи силата помеѓу тие две честички е секогаш насочена долж линијата која ги поврзува. Според тоа, добиваме

$$\dot{\mathbf{L}} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^H = \boldsymbol{\tau}^H,$$

каде $\boldsymbol{\tau}^H$ е вкупниот надворешен момент на сила врз системот. Во отсуство на надворешен момент на сила, оваа равенка покажува дека моментот на импулс е константен со текот на времето.

За цврст ротирачки објект, сите честички ротираат со иста аголна брзина. Според тоа, за моментот на импулс добиваме

$$L = \sum_i L_i = \sum_i I_i \omega = I \omega.$$

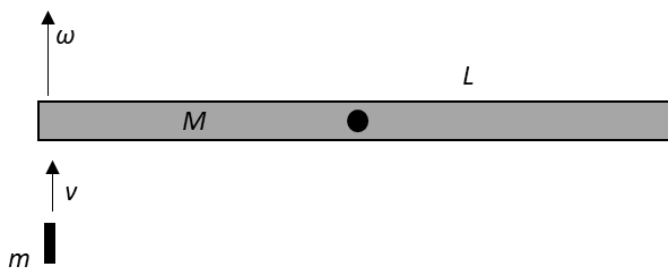
Со диференцирање, добиваме

$$\tau^H = I \varepsilon.$$

Оваа равенка покажува дека аголот забрзување на цврст ротирачки објект е определено од вкупниот надворешен момент на сила.

Пример 5.9. Тенка униформна прачка со маса M и должина L може слободно да ротира околу нејзиниот центар. Во прачката удира мал објект со маса m и брзина v . После судирот, малиот објект останува внатре во прачката. Пресметај ја почетната аголна брзина со која се придвижува системот прачка–мал објект. Колкав дел од почетната енергија се губи при овој нееластичен судир?

Ќе го примениме законот за константен момент на импулс пред и по судирот со оглед на отсуството на надворешен момент на сила.



Фигура 5.11. Ротирање на униформна прачка по нееластичен судир.

$$L_{\text{пред}} = L_{\text{после}},$$

$$mv \frac{L}{2} = \frac{L}{2} m \omega \frac{L}{2} + \frac{ML^2}{12} \omega,$$

$$\omega = \frac{6mv}{L(3m + M)}.$$

Енергијата пред судирот е

$$E_{\text{пред}} = \frac{mv^2}{2},$$

додека енергијата после судирот е

$$E_{\text{после}} = \frac{\left(\frac{mL^2}{4} + \frac{ML^2}{12}\right)\omega^2}{2} = \frac{(3m + M)L^2\omega^2}{24}.$$

За односот на овие две енергии добиваме

$$\frac{E_{\text{после}}}{E_{\text{пред}}} = \frac{1}{1 + \frac{M}{3m}}.$$

Пример 5.10. Парче мраз во форма на идеална коцка со страна L се движи по мазна површина без триење со брзина v . Пред работ на хоризонталната површина, парчето мраз удира во мала препрека и почнува да ротира околу таа точка. Колкава е максималната брзина v при која парчето мраз сеуште нема да падне од површината?



Фигура 5.12. Ротација на коцка по судир со мала препрека.

Прво, ќе го пресметаме моментот на инерција на коцката околу центарот на маса:

$$I_c = \int R^2 dm = \frac{M}{L^3} \int (x^2 + y^2) dx dy dz = 2 \frac{M}{L^3} \int x^2 dx dy dz = 2 \frac{M}{L} \int_{-L/2}^{L/2} x^2 dx$$

$$= \frac{ML^2}{6}.$$

Со примена на теоремата за паралелна оска, за моментот на инерција околу точката на ротација на површината добиваме

$$I = I_c + \frac{ML^2}{2} = \frac{2ML^2}{3}.$$

Со примена на законот за константен момент на импулс за коцката непосредно пред и после судирот, добиваме

$$Mv \frac{L}{2} = \frac{2ML^2}{3} \omega,$$

$$\omega = \frac{3v}{4L}.$$

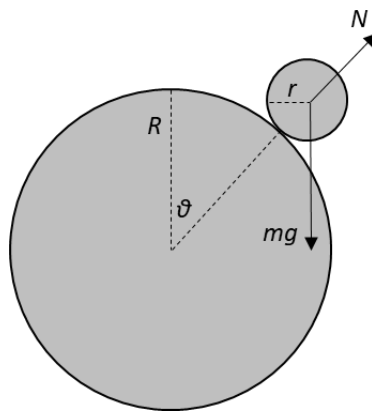
Целата кинетичка енергија на парчето мраз после судирот се трансформира во потенцијална енергија при ротацијата. Во граничниот случај од интерес, коцката ќе има аголна брзина еднаква на нула кога нејзината странична дијагонала е долж вертикалната насока. Во овој случај, со примена на законот за константна енергија добиваме

$$\frac{I\omega^2}{2} = Mg \left(H - \frac{L}{2} \right),$$

каде $H = \frac{L}{\sqrt{2}}$ е максималната висина на центарот на маса. Со замена, добиваме

$$v = \sqrt{\frac{8gL}{3}(\sqrt{2} - 1)}.$$

Пример 5.11. На врвот на голема прицврстена топка со радиус R е поставена мала топка со радиус r , која почнува да се тркала надолу по големата топка со почетна брзина нула. Пресметај го аголот од вертикалата кога малата топка ќе изгуби контакт со големата топка.



Фигура 5.13. Слободно тркалање на топка по сферна површина.

За малата топка може да го примениме законот за константна енергија за две точки, врвот на големата топка и точката на одвојување. Ако нулта висина дефинираме кај центарот на големата топка, добиваме:

$$mg(R + r) = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} + mg(R + r)\cos\theta,$$

каде кинетичката енергија на топката е збир од транслаторната и ротациската компонента. Моментот на инерција на топката околу нејзиниот центар на маса ја пресметавме во еден од претходните примери, $I = \frac{2mr^2}{5}$.

Во точката на одвојување, нормалната сила на реакција е нула. Во овој момент, само проекцијата на гравитациската сила на радијалната насока резултира во центрипетално забрзување на центарот на маса на малата топка:

$$mg\cos\theta = \frac{mv^2}{R+r}.$$

Со оглед на геометријата на задачата, во отсуство на пролизгување на контактот помеѓу малата и големата топка, може да ја запишеме следнава равенка:

$$v = \omega r.$$

Со замена во равенката за константна енергија, добиваме

$$mg(R+r)(1-\cos\theta) = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} = \frac{mv^2}{2} \left(1 + \frac{I}{mr^2}\right).$$

Со замена на равенката добиена во моментот на одвојување на малата топка од големата топка, добиваме

$$2mg(R+r)(1-\cos\theta) = mg\cos\theta(R+r) \left(1 + \frac{I}{mr^2}\right),$$

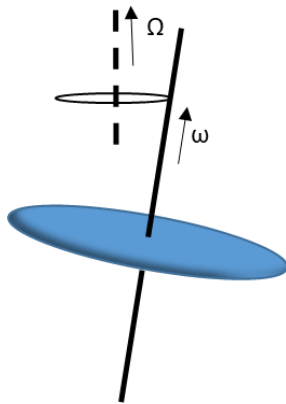
$$\cos\theta = \frac{2}{3 + \frac{I}{mr^2}} = \frac{10}{17}.$$

5.4 Прецесија

Разгледуваме објект кој ротира со аголна брзина ω околу вертикална оска која поминува низ неговиот центар на маса. Ако оската на ротација ја изместиме, како што е прикажано во **Фигура 5.14**, на ротирачкиот објект ќе дејствува вкупен надворешен момент на гравитациската сила:

$$\tau = mgr\sin\theta,$$

каде θ е аголот на отклонување на оската на ротација од вертикалата, додека r е растојанието од долната точка на ротација до центарот на маса. Насоката на овој вкупен надворешен момент на сила е нормална на оската на ротација и на вертикалата со оглед на дефиницијата на моментот на сила преку векторскиот производ на надворешната сила и векторот на положба на центарот на маса.



Фигура 5.14. Прецесија на ротирачки објект околу вертикална оска.

Овој надворешен момент на гравитациската сила ќе го ротира дополнително објектот околу вертикалната оска со аголна брзина Ω . Бидејќи промената на моментот на импулс на објектот е еднаква на надворешниот момент на сила, може да запишеме

$$\tau dt = dL = L \sin\theta \times \Omega dt = I \omega \sin\theta \times \Omega dt,$$

$$mgr = I \omega \Omega,$$

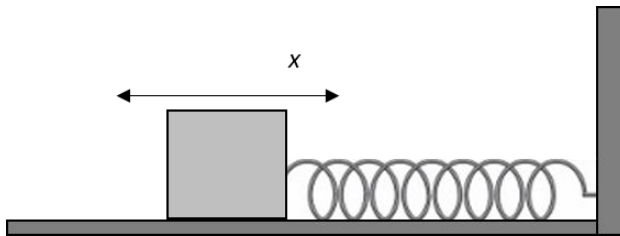
$$\Omega = \frac{mgr}{I \omega}.$$

Овој резултат покажува дека аголната брзина на прецесија е обратно пропорционална на аголната брзина на ротација околу сопствената оска, т.е., побрзо ротирачки објекти имаат побавна прецесија.

6. ОСЦИЛАЦИИ

6.1 Хармониски осцилатор

Осцилации се повторливи движења околу рамнотежна положба. После изместување од рамнотежа, објектот прикачен на пружината во **Фигура 6.1** осцилира околу рамнотежната состојба на пружината. Овој систем е репрезентативен пример на осцилатор.



Фигура 6.1. Хармониски осцилатор составен од објект прикачен на пружина.

За да ја определиме равенката на движење на овој едно-димензионален осцилатор, ќе го запишеме вториот Њутнов закон на прикачениот објект со маса m :

$$m\ddot{x} = -kx,$$

каде x е изместувањето од рамнотежната положба, додека k е коефициентот на еластичност на пружината. Со трансформација ја добиваме следнава диференцијална равенка од втор ред:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0.$$

Ако дефинираме $\omega^2 = \frac{k}{m}$, општото решение на оваа диференцијална равенка може да го запишеме како

$$x = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t),$$

каде A и B се произволни константи определени од почетните услови, во случајов почетната координата и почетната брзина. Решението може да се претстави и како

$$x = C \cos(\omega t + \varphi),$$

каде C и φ се определени со A и B . Според тоа, општото решение е осцилаторна функција со период

$$T = \frac{2\pi}{\omega},$$

амплитуда C , и почетна фаза φ . Осцилатор од ваков тип се нарекува хармониски осцилатор.

Енергијата на овој осцилатор е збир на кинетичката енергија на објектот и потенцијалната енергија на пружината, која ја добиваме со интегралот

$$U = - \int_0^x -kx dx = \frac{kx^2}{2}.$$

Според тоа, вкупната енергија на овој изолиран систем е

$$E = \frac{kx^2}{2} + \frac{m\dot{x}^2}{2}.$$

Со диференцирање, ќе потврдиме дека енергијата е константна со текот на времето:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2}(2kx\dot{x} + 2m\dot{x}\ddot{x}) = \dot{x}(kx + m\ddot{x}) = 0,$$

бидејќи $m\ddot{x} = -kx$. Ако го диференцираме општото решение

$$x = C \cos(\omega t + \varphi),$$

за брзината добиваме

$$\dot{x} = -C\omega \sin(\omega t + \varphi).$$

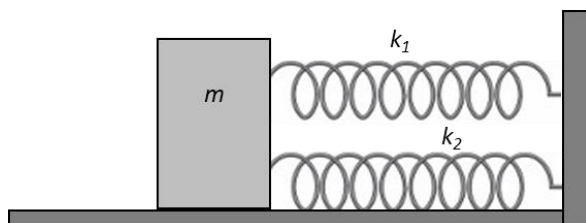
Согласно овие равенки, координатата и брзината преставуваат осцилаторни процеси со ист период и меѓусебно фазно поместување од $\frac{\pi}{2}$.

Согласно дефинициите за кинетичката енергија на објектот и потенцијалната енергија на пружината, истото фазно поместување постои помеѓу нив, т.е., енергијата на системот постојано се трансформира од кинетичка во потенцијална, и обратно. Во позицијата на максимално отклонување, брзината на објектот е нула. Според тоа, вкупната енергија е еднаква на потенцијалната енергија на пружината:

$$E = \frac{kC^2}{2},$$

каде C е максималното отклонување (амплитуда) на осцилаторот.

Пример 6.1. Објект со маса m е прикачен на две пружини со различни коефициенти на еластичност во паралелна конфигурација. Покажи дека осцилаторот е хармониски и пресметај го неговиот период.



Фигура 6.2. Осцилатор составен од објект и две пружини со различни коефициенти на еластичност во паралелна конфигурација.

Оваа задача ќе ја решиме со вториот Њутнов закон:

$$-k_1x - k_2x = m\ddot{x},$$

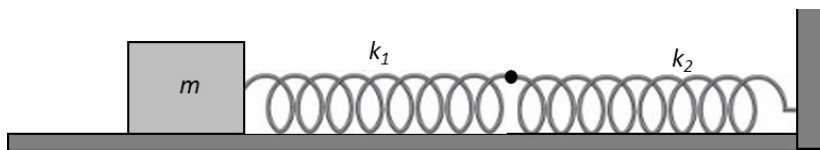
каде x е отклонувањето од рамнотежната позиција. Во задачавата, претпоставуваме дека двете пружини имаат иста должина кога се во рамнотежна положба. Со трансформација, добиваме хармониски осцилатор:

$$m\ddot{x} + (k_1 + k_2)x = 0,$$

со период

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}.$$

Пример 6.2. Објект со маса m е прикачен на две пружини со различни коефициенти на еластичност во сериска конфигурација. Покажи дека осцилаторот е хармониски и пресметај го неговиот период.



Фигура 6.3. Осцилатор составен од објект прикачен на две пружини со различни коефициенти на еластичност во сериска конфигурација.

Како и претходниот пример, и оваа задача ќе ја решиме со вториот Њутнов закон:

$$F_{el} = m\ddot{x},$$

каде F_{el} е резултантната еластична сила од двете сериски-поврзани пружини врз објектот. Вкупното изместување на осцилаторот е збир на поместувањата на двете пружини:

$$x = x_1 + x_2.$$

Под претпоставка дека масите на пружините се занемарливо мали, еластичните сили генерирани од двете пружини се меѓусебно еднакви, и се исто така еднакви на еластичната сила врз објектот:

$$F_{el1} = F_{el2} = F_{el}.$$

Со замена во претходниот израз добиваме

$$x = \frac{F_{el}}{k_1} + \frac{F_{el}}{k_2},$$

Според тоа, ако дефинираме

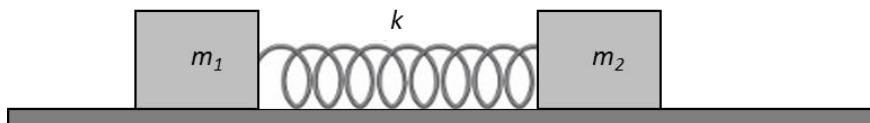
$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2},$$

еластичната сила врз објектот може да ја запишеме како $F_{el} = -kx$, со што добиваме равенка на хармониски осцилатор со еквивалентен коефициент на еластичност k и период

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m(k_1 + k_2)}{k_1 k_2}}.$$

6.2 Двочестичен осцилатор

Разгледуваме осцилатор составен од два објекти со маси m_1 и m_2 меѓусебно поврзани со пружина со коефициент на еластичност k , прикажан во **Фигура 6.4**.



Фигура 6.4. Осцилатор составен од две честички поврзани со еластична пружина.

Движењето на овој систем е определено со вториот Њутнов закон запишан за двата објекти:

$$m_1 \ddot{x}_1 = kx,$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = -kx,$$

каде $x = x_2 - x_1 - L$ е издолжувањето на пружината од рамнотежна положба, додека L е нејзината должина во рамнотежната положба. Со воведување на редуцирана маса на системот

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2},$$

со одземање на равенката за вториот објект од равенката за првиот објект добиваме

$$\ddot{x} = -\frac{k}{\mu}x.$$

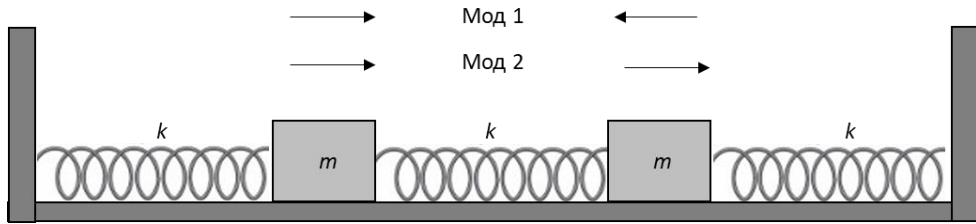
Оваа равенка покажува дека системот врши хармониски осцилации на x со период

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\mu}{k}}.$$

Согласно овој резултат, движењето на системот може да се разложи на рамномерно движење на центарот на маса со константна брзина и хармониски осцилации на растојанието помеѓу објектите со период определен од редуцираната маса на системот.

6.3 Осцилации на две спрегнати маси

Ги разгледуваме лонгитудиналните осцилации на системот од две маси поврзани со пружини, прикажан во **Фигура 6.5**.



Фигура 6.5. Осцилации на две спрегнати маси.

Прво, овој систем ќе го разгледаме квалитативно. Согласно геометријата на задачата, постојат две независни начини (модови) на осцилации на системот. Мод 1 ја претставува осцилацијата на системот кога масите се движат со спротивни фази, симетрично една кон друга, додека мод 2 ја претставува осцилацијата на системот кога масите се движат симетрично со иста фаза. Согласно геометријата на задачата, т.е., пружините, во мод 1, трите пружини се деформирани при осцилациите, додека во мод 2, средната пружина е во недеформирана состојба. Бидејќи еластичната сила е пропорционална на деформацијата на пружините, можеме да очекуваме дека двата модови ќе имаат различни периоди/фреквенции.

Оваа дискусија ќе ја потврдиме со изведување на равенките на движење за двете маси. Ќе претпоставиме дека двете маси и трите пружини се идентични. Изведувањето на равенките во генерален случај за неидентични маси и пружини е на аналоген начин. Ќе го запишеме вториот Њутнов закон за двете маси:

$$m\ddot{x}_1 = -kx_1 + k(x_2 - x_1),$$

$$m\ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1) - kx_2,$$

каде x_1 и x_2 се поместувањата на двете маси од нивните рамнотежни положби. Претпоставуваме дека во рамнотежната положба пружините

се недеформирани. Со воведување на величината $\omega^2 = \frac{k}{m}$, системот на диференцијални равенки може да го запишеме како

$$\ddot{x}_1 = -2\omega^2 x_1 + \omega^2 x_2,$$

$$\ddot{x}_2 = \omega^2 x_1 - 2\omega^2 x_2.$$

Овој систем на равенки може да го запишеме во матрична форма:

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\omega^2 & \omega^2 \\ \omega^2 & -2\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Со дијагонализација на матрицата, и преминот кон соодветните нови координати, добиваме две независни диференцијални равенки кои преставуваат осцилации со две различни фреквенции. Ако дефинираме

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \Omega = \begin{pmatrix} -2\omega^2 & \omega^2 \\ \omega^2 & -2\omega^2 \end{pmatrix},$$

системот на равенки го трансформираме во

$$\ddot{X} = \Omega X.$$

Со воведување на нови координати

$$Y = AX,$$

добиваме

$$A^{-1}\ddot{Y} = \Omega A^{-1}Y,$$

$$\ddot{Y} = A\Omega A^{-1}Y.$$

Според тоа, ако по трансформацијата на координатите $A\Omega A^{-1}$ е дијагонална матрица добиваме два независни осцилаторни процеси за y_1 и y_2 со различни фреквенции. Со оглед на геометријата на задачата и првичната дискусија за модовите на осцилации, ќе ги воведеме следниве нови координати:

$$y_1 = \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{2}},$$

$$y_2 = \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{2}}.$$

Според тоа

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, A^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Факторот $\sqrt{2}$ го воведуваме за симетричност на трансформацијата од X во Y , и обратно. Според ова, добиваме

$$\begin{aligned} A\Omega A^{-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2\omega^2 & \omega^2 \\ \omega^2 & -2\omega^2 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\omega^2 & -3\omega^2 \\ -\omega^2 & 3\omega^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2\omega^2 & 0 \\ 0 & -6\omega^2 \end{pmatrix} \\ &= - \begin{pmatrix} \omega^2 & 0 \\ 0 & 3\omega^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Според овој резултат, y_1 и y_2 осцилираат со периоди

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega},$$

$$T_2 = \frac{2\pi}{\sqrt{3}\omega}.$$

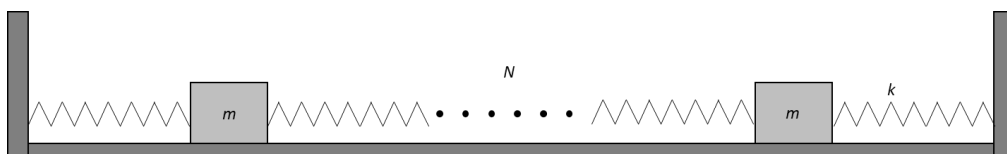
Овие два модови на осцилации се независни еден од друг. Во зависност од почетните услови, системот може да осцилира во мод 1 со $y_2 = 0$, и обратно, во мод 2, со $y_1 = 0$. Општото решение е суперпозиција на двата независни модови.

Овој осцилатор има два степени на слобода, кои се дефинираат како бројот на координати потребен за еднозначно определување на положбата на системот. Според тоа, за осцилатор со два степени на слобода добиваме два независни осцилаторни модови. Оваа анализа може да се прошири и на систем составен од повеќе честички. Бројот на

модови за таков систем ќе биде определен од бројот на степени на слобода. Во такви повеќе-честични системи, често се случува некои од модовите да имаат исти фреквенции. Таквите модови ги нарекуваме дегенерирани. Според тоа, за такви системи со многу степени на слобода, добиваме спектар на осцилации со различни фреквенции кои може да се добијат со дијагонализација на соодветната матрична диференцијална равенка.

6.4 Лонгитудинални осцилации на систем од N маси

Разгледуваме систем од N еднакви маси поврзани со идентични пружини, како што е прикажано во **Фигура 6.6**.



Фигура 6.6. Лонгитудинални осцилации на систем од N маси.

За n -та маса, равенката на движење е

$$m\ddot{x}_n = k(x_{n+1} - x_n) - k(x_n - x_{n-1}),$$

$$\ddot{x}_n = \omega_0^2(-2x_n + x_{n+1} + x_{n-1}).$$

Решението ќе го бараме во форма $x_n = a_n \sin(\omega t)$, што одговара на даден мод на осцилации. Со замена, добиваме

$$-\omega^2 a_n = \omega_0^2(-2a_n + a_{n+1} + a_{n-1}),$$

т.е., систем на линеарни равенки. Ќе покажеме дека решението на овој систем на равенки е

$$a_n = A \sin(\lambda n).$$

Со замена во равенката, добиваме

$$\omega = 2\omega_0 \sin\left(\frac{\lambda}{2}\right).$$

Вредноста на параметарот λ ќе ја определиме од граничниот услов

$$a_{N+1} = 0,$$

$$\sin(\lambda(N+1)) = 0,$$

$$\lambda(N+1) = k\pi,$$

$$\lambda = \frac{k\pi}{N+1}.$$

Согласно овој резултат, добиваме

$$x_n = A \sin\left(\frac{k\pi}{N+1}n\right) \sin(\omega_k t),$$

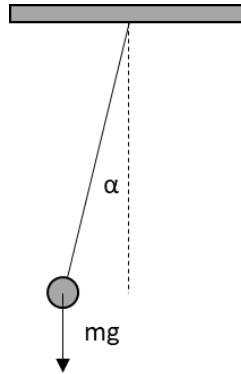
$$\omega_k = 2\omega_0 \sin\left(\frac{k\pi}{2(N+1)}\right).$$

Овие резултати покажуваат дека во системот се формираат бранови на осцилации со различни фреквенции определени од целиот број k . Бидејќи системот е линеарен, општата форма на осцилации може да се претстави како суперпозиција на овие бранови модови со различни фреквенции, т.е., бранови должини. Бројот на модови е еднаков на бројот на степени на слобода N , што директно следи од формата на аплитудата, $a_n = A \sin\left(\frac{k\pi}{N+1}n\right)$.

6.5 Математичко нишало

Математичко нишало претставува материјална точка прикачена на нерастеглива жица со занемарлива маса која осцилира околу рамнотежната положба, како што е прикажано во **Фигура 6.7**. Ќе ја

изведеме равенката на движење за осцилации со мал максимален агол на отклонување.



Фигура 6.7. Осцилации на математичко нишало.

Вториот Њутнов закон за материјалната точка со маса m е

$$m\mathbf{g} + \mathbf{T} = m\mathbf{a},$$

каде \mathbf{T} е силата со која жицата дејствува врз материјалната точка. Со проектирање на оваа равенка по тангентата добиваме

$$-mg\sin\alpha = mR\ddot{\alpha}.$$

За мали агли, ја добиваме следнава диференцијална равенка:

$$-mg\alpha = mR\ddot{\alpha},$$

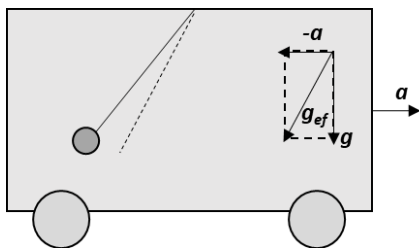
$$\ddot{\alpha} + \frac{g}{R}\alpha = 0.$$

Овој резултат покажува дека математичкото нишало е хармониски осцилатор при мали агли со период

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}}.$$

Согласно овој резултат, периодот на осцилации на математичкото нишало не зависи од неговата маса.

Пример 6.3. Пресметај го периодот на математичко нишало поставено во автомобил кој се движи со константно забрзување a по хоризонтална површина.



Фигура 6.8. Математичко нишало поставено во автомобил кој се движи со забрзување.

Во рамнотежна состојба, математичкото нишало во автомобилот е отклонето од вертикалата поради присуството на инерцијална сила во референтниот систем поврзан со автомобилот. Како што е прикажано во фигурата, аголот на отклон од вертикалата може да го пресметаме со формулата

$$\tan \alpha = \frac{a}{g}.$$

Осцилациите на нишалото се околу овој рамнотежен агол. За да го најдеме периодот, ќе искористиме дека ефективното забрзување во автомобилот е

$$g_{ef} = \sqrt{a^2 + g^2},$$

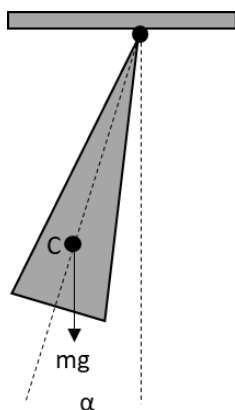
кое се добива со векторскиот збир на a и g . Според тоа, за периодот на мали осцилации добиваме

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R}{\sqrt{a^2 + g^2}}},$$

каде R е должината на жицата на која е прикачена материјалната точка што осцилира.

6.6 Физичко нишало

Кај математичко нишало, објектот што осцилира има занемарливо мали димензии. Кога реален објект со димензии кои не може да се занемарат осцилира, таквото нишало се нарекува физичко нишало, илустрирано во **Фигура 6.9**.



Фигура 6.9. Физичко нишало.

За физичкото нишало, карактеристични се две точки, точката на прикачување околу која се вршат осцилациите, и центарот на маса на објектот што осцилира. Растојанието помеѓу овие две точки ќе го

означиме со L . Гравитациската сила е единствената која генерира момент на сила. Равенката на движење за осцилирачкиот објект е

$$-mgL\sin\alpha = I\ddot{\alpha},$$

каде I е моментот на инерција на објектот. За мали агли, ја добиваме равенката

$$\ddot{\alpha} + \frac{mgL}{I}\alpha = 0.$$

Периодот на овие осцилации е

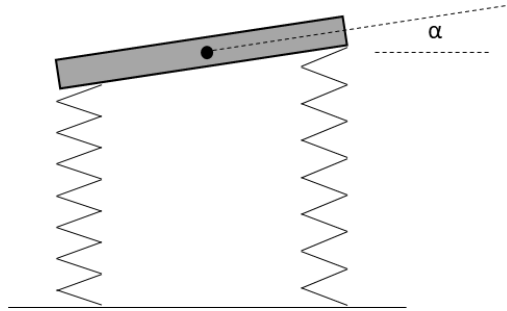
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgL}}.$$

Кога објектот што осцилира е точка со занемарливо мали димензии на растојание L од точката на прикачување, моментот на инерција е $I = mL^2$. Во ваков случај, добиваме

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{mL^2}{mgL}} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}},$$

што е формулата за период на математичко нишало.

Пример 6.4. Пресметај го периодот на мали осцилации за тенка метална прачка со должина L која ротира околу нејзиниот центар на маса како резултат на еластичните сили од две пружини, поставени како во **Фигура 6.10**.



Фигура 6.10. Осцилации на прачка околу центарот на маса под дејство на две еластични пружини.

Согласно геометријата на задачата, еластичната сила од една пружина е

$$F = k \frac{L}{2} \alpha.$$

Соодветниот момент на сила е

$$\tau = k \frac{L}{2} \alpha \frac{L}{2}.$$

Според тоа, вкупниот момент на сила од двете пружини е

$$\tau = \frac{kL^2}{2} \alpha.$$

Со замена во равенката за мали осцилации, добиваме

$$-\frac{kL^2}{2} \alpha = I \ddot{\alpha}.$$

Периодот на мали осцилации е

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2I}{kL^2}}.$$

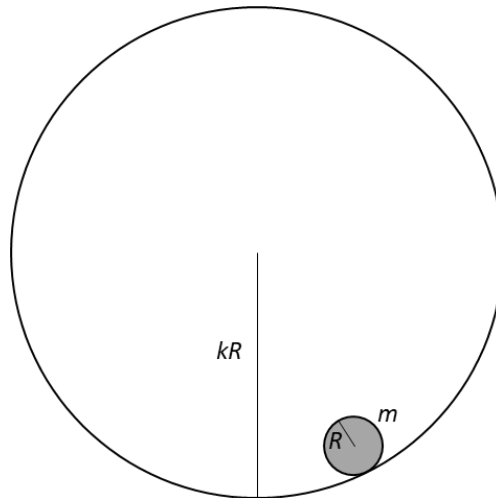
Моментот на инерција на металната прачка околу оската која поминува низ нејзиниот центар на маса е

$$I = \frac{mL^2}{12}.$$

Со замена, за периодот добиваме

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{6k}}.$$

Пример 6.5. Топка со маса m и радиус R осцилира внатре во сфера со радиус kR . Пресметај го периодот на мали осцилации. Да се претпостави дека топката осцилира во вертикална рамнина без пролизгување на сферата.



Фигура 6.11. Осцилации на топка во внатрешноста на сфера.

При агол на отклон α на центарот на маса на топката, нејзината потенцијална енергија во однос на рамнотежната положба е

$$E_p = mg(kR - (kR - R)\cos\alpha - R) = mg(kR - R)(1 - \cos\alpha).$$

Кинетичката енергија е збир на транслаторната компонента и ротациската компонента:

$$E_k = \frac{m(kR - R)^2 \dot{\alpha}^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}.$$

Моментот на инерција на топката е

$$I = \frac{2mR^2}{5}.$$

Со оглед на отсуството на пролизгување на контактот помеѓу топката и сферата,

$$\omega R = (kR - R)\dot{\alpha}.$$

Со замена, добиваме

$$E_k = \frac{m(kR - R)^2 \dot{\alpha}^2}{2} + \frac{mR^2(k - 1)^2 \dot{\alpha}^2}{5} = \frac{7mR^2(k - 1)^2 \dot{\alpha}^2}{10}.$$

Вкупната енергија е

$$E = E_k + E_p = \frac{7mR^2(k - 1)^2 \dot{\alpha}^2}{10} + mgR(k - 1)(1 - \cos\alpha).$$

Бидејќи енергијата е константна со текот на времето, со диференцирање добиваме

$$\dot{E} = \frac{7mR^2(k - 1)^2}{5} \dot{\alpha} \ddot{\alpha} + mgR(k - 1) \sin\alpha \dot{\alpha} = 0.$$

Со апроксимирање на синусната функција за мали агли, добиваме

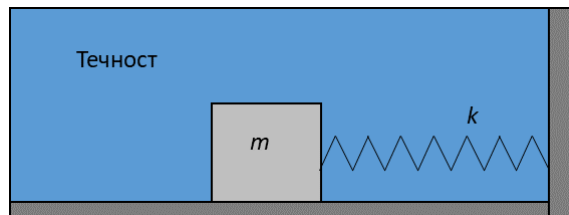
$$\frac{7mR^2(k - 1)^2}{5} \ddot{\alpha} + mgR(k - 1)\alpha = 0.$$

Ова е равенка за хармониски осцилатор со период

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{7(k-1)R}{5g}}$$

6.7 Пригушен осцилатор

Разгледуваме објект прикачен на пружина. Целиот систем е потопен во течност која генерира сила на отпор при движењето пропорционална на брзината.



Фигура 6.12. Осцилатор потопен во течност со сила на отпор пропорционална на брзината.

Силата на отпор од течноста ја запишуваме како

$$F_o = -c\dot{x},$$

каде c е коефициент на силата на отпор. Според ова, равенката на движење за овој осцилатор е

$$-kx - c\dot{x} = m\ddot{x},$$

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0,$$

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2x = 0,$$

каде $\frac{\omega_0}{2\pi}$ е сопствената фреквенција на осцилаторот без присуство на течноста, додека $\beta = \frac{c}{2m}$. Овој осцилатор и други системи кои се опишуваат со ваква диференцијална равенка на движење се нарекуваат пригушени осцилатори. Ако се познати две решенија на оваа диференцијална равенка од втор ред, тогаш општото решение е линеарна суперпозиција на тие две посебни решенија. Решението ќе го бараме во облик

$$x \sim e^{i\lambda t}.$$

Со замена во равенката, добиваме

$$\lambda^2 - 2\beta i\lambda - \omega_0^2 = 0,$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{2\beta i \pm \sqrt{4\omega_0^2 - 4\beta^2}}{2} = i\beta \pm \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}.$$

Можни се три различни сценарија: $\omega_0 > \beta$, $\omega_0 = \beta$, и $\omega_0 < \beta$. Ќе ги разгледаме поединично овие три различни типови на осцилирање.

Во случај на слабо пригушување, $\omega_0 > \beta$, изразот под корен е позитивен. Според тоа, решението на равенката е во облик

$$x \sim e^{-\beta t} \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} t\right).$$

Ова решение преставува осцилаторно движење со редуцирана фреквенција $\frac{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}{2\pi}$ и амплитуда која експоненцијално се намалува како $e^{-\beta t}$.

Во случајот на силно пригушување, $\omega_0 < \beta$, добиваме имагинарно решение за λ . Согласно ова решение,

$$x = A e^{-\left(\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}\right)t} + B e^{-\left(\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}\right)t}.$$

Во овој случај, решението е суперпозиција на експоненцијални функции со две различни стапки на опаѓање. Објектот се враќа во рамнотежна состојба без осцилаторен процес.

Во граничниот случај кога $\omega_0 = \beta$, решенијата на квадратната равенка се дегенерирани. Со замена во равенката, може да се провери дека второто решение има облик

$$x \sim te^{-\beta t}.$$

Според тоа, општото решение во овој граничен случај е

$$x = (A + Bt)e^{-\beta t}.$$

И во овој случај, објектот се враќа во рамнотежна положба без осцилаторен процес, но побрзо од случајот на силно пригушување. Од двата експоненти кај силно прогушување, поспоро опаѓа членот $e^{-(\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t}$, додека во случајот $\omega_0 = \beta$, координатата опаѓа како $e^{-\beta t}$, т.е., побрзо од случајот на силно пригушување.

6.8 Присилени осцилации

Разгледуваме пригушен осцилатор на кој дејствува периодична надворешна сила со фреквенција $\omega/2\pi$. Неговата равенка на движење е

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2x = \frac{f}{m}\cos(\omega t),$$

каде f е амплитудата на надворешната сила. Решението на равенкава е во облик

$$x = x_e + x_p,$$

каде x_e е решение на соодветниот пригушен осцилатор без надворешната сила, кое експоненцијално се намалува со текот на

времето, додека x_p е осцилирачкиот дел на решението со фреквенција еднаква на фреквенцијата на надворешната сила. Според тоа, за посебното решение x_p важи истата равенка

$$\ddot{x}_p + 2\beta\dot{x}_p + \omega_0^2 x_p = \frac{f}{m} \cos(\omega t).$$

x_p ќе го запишеме како

$$x_p = \operatorname{Re}(Ae^{i\omega t}).$$

Со замена во равенката, добиваме

$$\operatorname{Re}(-A\omega^2 e^{i\omega t} + 2\beta i\omega A e^{i\omega t} + \omega_0^2 A e^{i\omega t}) = \operatorname{Re}\left(\frac{f}{m} e^{i\omega t}\right).$$

За амплитудата A , добиваме

$$A = \frac{\frac{f}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2\beta i\omega} = \frac{\frac{f}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} e^{-i\varphi},$$

каде

$$\tan(\varphi) = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

За x_p добиваме

$$x_p = \operatorname{Re}(Ae^{i\omega t}) = \frac{\frac{f}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} \cos(\omega t - \varphi),$$

каде φ е фазната разлика помеѓу надворешната сила и координатата на осцилаторот. Согласно овој резултат, покрај решението кое експоненцијално се намалува, постои и осцилаторен член со иста фреквенција и одредено фазно задоцнување.

Во отсуство на сила на отпор, фазната разлика е нула, и за амплитудата на осцилации добиваме

$$A = \frac{\frac{f}{m}}{|\omega_0^2 - \omega^2|}.$$

Кога надворешната фреквенција се приближува до сопствената фреквенција на осцилаторот, амплитудата се зголемува до бесконечност за $\omega = \omega_0$:

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_0} A = \infty.$$

Овој процес се нарекува резонанс. Согласно овие резултати, надворешна екситација на даден систем силно ги активира неговите модови на осцилации со фреквенции блиски до надворешната.

7. ДВИЖЕЊЕ ВО ГРАВИТАЦИСКО ПОЛЕ

7.1 Гравитациска сила

Помеѓу две честички со маси m_1 и m_2 , дејствува привлечна гравитациска сила

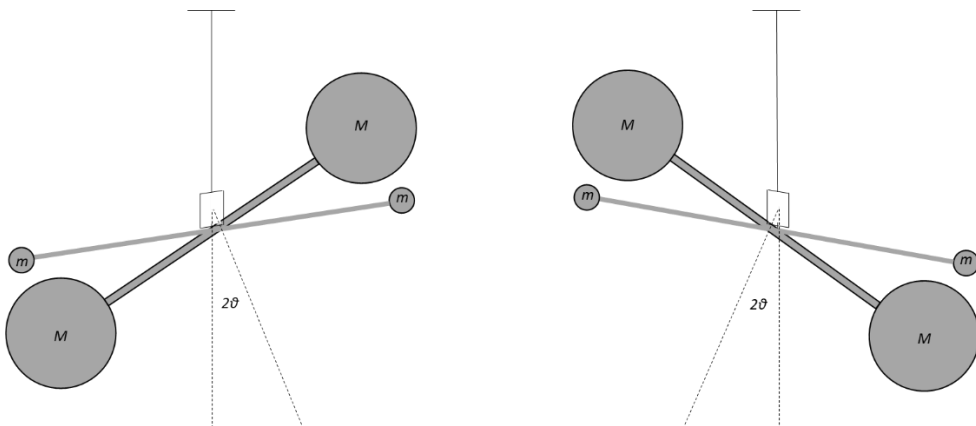
$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

каде $\gamma = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$ се нарекува универзална гравитациска константа, додека r е растојанието помеѓу честичките.

Согласно оваа формула, објекти со поголема маса создаваат посилено гравитациско поле, кое релативно брзо опаѓа со зголемување на растојанието.

7.2 Експеримент на Кевендиш

Универзалната гравитациска константа може да се измери преку експериментот на Кевендиш, илустриран во **Фигура 7.1**.



Фигура 7.1. Експеримент на Кевендиш за мерење на гравитациската константа.

Во овој експеримент, се користат две големи топки со маси M и две мали топки со маси m . Малите топки се прицврстени на тенка прачка која е прицврстена на вертикална торзиона жица. На торзионата жица е прицврстено мало огледало преку кое може да се измери аголот на отклон на торзионата жица од рамнотежната положба со помош на ласер. Ако аголот на отклон на огледалото е θ , ласерскиот сноп одбиен од огледалото ќе се отклони за двапати поголем агол, 2θ , бидејќи аголот на отклон на ласерскиот сноп е збир на влезниот и излезниот агол на ласерскиот сноп врз огледалото, двата еднакви на θ . За зголемување на сензитивноста на експериментот, системот се поставува во две спротивни симетрични конфигурации, како што е прикажано во фигурата, така што се мери разликата помеѓу отклонувањата во тие две конфигурации, 4θ . Ако едниот крај на торзионата жица е ротиран за мал агол θ , торзионата жица генерира момент на сила

$$\tau = -k\theta,$$

кој ја враќа торзионата жица во рамнотежна положба во отсуство на други сили, каде k е коефициент на торзија. Ако на торзионата жица ги прикачине меѓусебно поврзаните мали топки, во отсуство на големите топки, таков систем ќе осцилира по отклонување од рамнотежна состојба. Периодот на осцилации може да се најде со решавање на равенката

$$\tau = I\varepsilon = I\ddot{\theta} = -k\theta,$$

$$\ddot{\theta} + \frac{k}{I}\theta = 0,$$

каде I е моментот на инерција на системот од двете мали топки. Ова е равенка на хармониски осцилатор со период

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{k}}.$$

Со оваа равенка, може да го пресметаме коефициентот на торзија со мерење на периодот на осцилации и пресметување на моментот на инерција за овој систем.

Двете големи топки се на сличен начин меѓусебно прицврстени и може да ротираат околу истата торзиона оска, независно од малите топки. Ако парот на големи топки го доближиме до парот на мали топки, како што е прикажано на левиот дел од фигурата, на секоја од двете мали топки дејствува гравитациската сила од соодветната голема топка:

$$F = \gamma \frac{mM}{r^2}.$$

Ако должината на прачката која ги поврзува е L , вкупниот момент на гравитациска сила врз торзионата жица е

$$\tau = 2F \frac{L}{2} = FL = \gamma \frac{mM}{r^2} L.$$

Според тоа, може да ја запишеме равенката

$$k\theta = \tau = \gamma \frac{mM}{r^2} L,$$

од каде за гравитациската константа добиваме

$$\gamma = \frac{k\theta r^2}{mML},$$

каде r е растојанието помеѓу соодветните голема и мала топка при отклонета торзиона жица. Со оваа формула, може да ја пресметаме гравитациската константа со мерење на периодот на осцилации, пресметување на моментот на инерција за малите топки, и мерење на аголот на отклон на торзионата жица преку двете спротивни симетрични конфигурации прикажани во фигурата за зголемена точност на мерењето.

Силата со која Земјината топка со маса M дејствува врз даден објект со маса m на нејзината површина е

$$\gamma \frac{mM}{R^2} = mg,$$

каде R е радиусот на Земјината топка. Оваа равенка покажува дека, ако ја измериме гравитациската константа со претходниот експеримент, може да ја пресметаме масата на Земјината топка знаејќи го нејзиниот радиус и вредноста на гравитациското забрзување. Според тоа, мерењето на гравитациската константа е од особена важност.

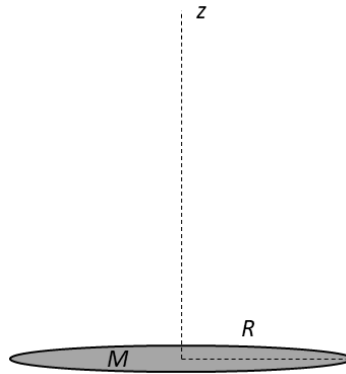
7.3 Потенцијална енергија

Гравитациската сила е централна сила бидејќи е радијална и зависи само од растојанието помеѓу двата објекти. Според тоа, работата извршена од оваа сила од позиција А до позиција В не зависи од конкретната форма на патеката на интегрирање од А до В бидејќи елементарната работа дефинирана со скаларниот производ $\mathbf{F}d\mathbf{r}$ е еднаква на Fdr . Според тоа, гравитациската сила е конзервативна со потенцијална енергија

$$U(r) = - \int F dr = \int \gamma \frac{mM}{r^2} dr = -\gamma \frac{mM}{r},$$

со граничен услов $U(\infty) = 0$.

Пример 7.1. Пресметај ја потенцијалната енергија и силата која дејствува на објект со маса m во позиција која е на растојание z од центарот на хомоген диск со маса M и радиус R .



Фигура 7.2. Гравитација од хомоген диск.

Потенцијалната енергија ќе ја определиме преку интегралот

$$\begin{aligned}
 U &= -\gamma m \int \frac{dM}{r} = -\frac{\gamma m M}{\pi R^2} \int \frac{dA}{r} = -\frac{\gamma m M}{\pi R^2} \int_0^R \frac{2\pi\rho d\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \\
 &= -\frac{2\gamma m M}{R^2} \left[\sqrt{R^2 + z^2} - z \right].
 \end{aligned}$$

За силата, добиваме

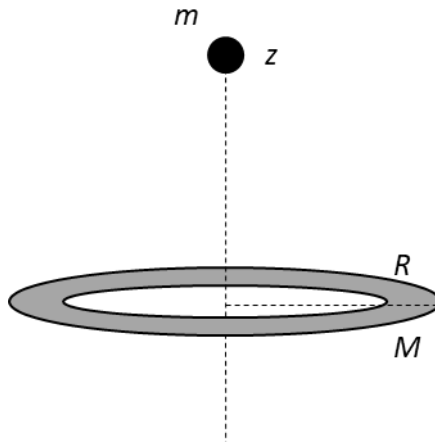
$$F_z = -\frac{dU}{dz} = -\frac{2\gamma m M}{R^2} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{R}{z}\right)^2 + 1}} \right].$$

За големи растојанија, кога $\frac{R}{z} \ll 1$, за силата добиваме

$$F_z \approx -\frac{2\gamma m M}{R^2} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{R}{z} \right)^2 \right) \right] = -\frac{2\gamma m M}{R^2} \frac{1}{2} \left(\frac{R}{z} \right)^2 = -\frac{\gamma m M}{z^2},$$

затоа што во овој случај дискот може да се апроксимира како материјална точка која дејствува на материјалната точка со маса m .

Пример 7.2. Материјална точка со маса m се наоѓа на растојание z од прстен со маса M и радиус R . Пресметај ја потенцијалната енергија и гравитациската сила на објектот со маса m во координатата z . Колкава ќе биде неговата брзина кога објектот со маса m ќе помине низ центарот на прстенот ако паѓа слободно од координатата z ?



Фигура 7.3. Гравитација на прстен со маса M .

За потенцијалната енергија, добиваме

$$U = -\gamma m \int \frac{dM}{r} = -\frac{\gamma m M}{\sqrt{R^2 + z^2}}.$$

Со диференцирање, за силата добиваме

$$F_z = -\frac{dU}{dz} = -\gamma m M \frac{z}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

За многу големи растојанија кога $\frac{R}{z} \ll 1$, добиваме

$$F_z = -\frac{\gamma m M}{z^2} \frac{1}{\left(\left(\frac{R}{z}\right)^2 + 1\right)^{\frac{3}{2}}} \approx -\frac{\gamma m M}{z^2}.$$

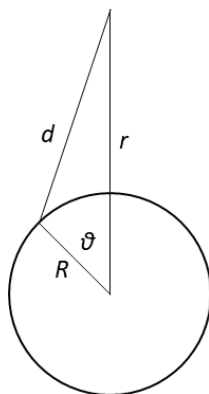
Како и во претходниот пример, за силата добиваме дека е приближно еднаква на силата помеѓу две материјални точки.

За да ја пресметаме брзината кога објектот поминува низ центарот на прстенот, ќе го примениме законот за константна енергија. Во почетната положба, објектот има потенцијална енергија $-\frac{\gamma mM}{\sqrt{R^2+z^2}}$ и кинетичка енергија нула, додека во центарот на прстенот, потенцијалната енергија е $-\frac{\gamma mM}{R}$, и кинетичката енергија е $\frac{mv^2}{2}$. Според тоа,

$$-\frac{\gamma mM}{\sqrt{R^2+z^2}} = -\frac{\gamma mM}{R} + \frac{mv^2}{2},$$

$$v = \sqrt{\frac{2\gamma M}{R} \left(1 - \frac{R}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)}.$$

Пример 7.3. Пресметај го потенцијалот на сфера со радиус R и маса M .



Фигура 7.4. Потенцијал на тенка сфера со маса M и радиус R .

Потенцијалот е дефиниран како

$$\varphi = \frac{U}{m} = - \int \frac{\gamma dM}{d} = -\gamma \frac{M}{4\pi R^2} \int \frac{2\pi R^2 \sin\theta d\theta}{d}.$$

Растојанието d е дефинирано во **Фигура 7.4**,

$$d^2 = R^2 \sin^2 \theta + (r - R \cos \theta)^2 = R^2 + r^2 - 2rR \cos \theta.$$

Со диференцирање, добиваме

$$2d \, dd = 2rR \sin \theta \, d\theta.$$

Со замена во интегралот, добиваме

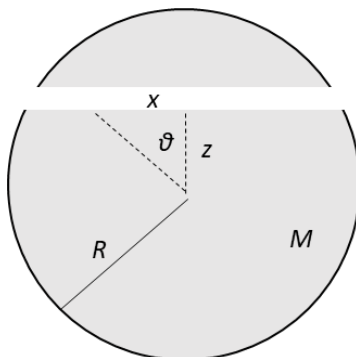
$$\varphi = -\gamma \frac{M}{4\pi R^2} \int \frac{2\pi R^2 d \, dd}{drR} = -\gamma \frac{M}{2rR} \int_{r-R}^{r+R} dd = -\frac{\gamma M}{r}$$

за позиција надвор од сферата. Кога точката од интерес е во внатрешноста на сферата, со оглед на геометријата на задачата, границите на интегрирање се менуваат:

$$\varphi = -\gamma \frac{M}{2rR} \int_{R-r}^{r+R} dd = -\frac{\gamma M}{R}.$$

Согласно овие резултати, внатре во сферата, потенцијалот е константен, што значи дека не дејствува гравитациска сила, додека надвор од сферата, потенцијалот е еднаков на потенцијалот на материјална точка со положба во центарот на сферата. Овој резултат има голема практична важност за пресметување на гравитациската сила генерирана од сферни изотропни објекти. На пример, хомогена топка може да ја разгледаме како збир на тенки сфери со растечки радиуси. Според тоа, надвор од топката, гравитациската сила е еднаква на силата генерирана од материјална точка во центарот на топката. Внатре во топката, само делот од топката од центарот до точката од интерес придонесува кон гравитациската сила. Обвивката од точката од интерес до површината на топката нема придонес кон гравитациската сила.

Пример 7.4. Во топка со радиус R е направен тунел на растојание z од центарот на топката со маса M . Изведи ја равенката на слободно движење на објект во тунелот.



Фигура 7.5. Равенка на движење во тунел во топка со маса M .

Кога објектот во движење е под агол θ во однос на вертикалата, кон гравитациската сила придонесува само внатрешниот дел од топката до радиус $\frac{z}{\cos\theta}$. Сметајќи го тунелот за едно-димензионален, само хоризонталната компонента на гравитациската сила G_h придонесува во движењето:

$$G_h = G \sin\theta = -\sin\theta \frac{\gamma m M \cos^2\theta \left(\frac{z}{\cos\theta}\right)^3}{z^2} = -\frac{\gamma m M x}{R^3}.$$

Овој резултат покажува дека силата која дејствува врз објектот зависи линеарно од оддалеченоста од вертикалната оска. Според тоа, равенката на движење е

$$-\frac{\gamma m M x}{R^3} = m \ddot{x},$$

$$\ddot{x} + \frac{\gamma M}{R^3} x = 0.$$

Ова е равенка на хармониски осцилатор со период

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{\gamma M}}$$

Ако топката во која е направен тунелот е Земјината топка, нејзината маса може да ја пресметаме преку гравитациското забрзување:

$$\frac{\gamma M}{R^2} = g,$$

$$\gamma M = gR^2.$$

Со замена, за периодот на осцилации добиваме

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}} \approx 84 \text{ min.}$$

Резултатот покажува дека периодот на осцилации не зависи од тоа каде е направен тунелот, т.е., колку блиску до центарот на топката. Според тоа, движењето по вакви тунели би траело околу 42 min помеѓу било кои две точки од површината.

7.4 Орбитално движење во гравитациско поле

Гранична брзина за излез од гравитациско поле

Разгледуваме движење на објект со маса m во гравитациското поле на масивен објект со маса M . Доколку објектот со маса m се исфрли од површината на масивниот објект, тој ќе се движи во неговото гравитациско поле ако кинетичката енергија при исфрлањето е помала од промената на потенцијалната енергија од површината на масивниот објект до “бесконечно” далечна точка. Доколку ова не е исполнето, исфрлениот објект ќе го напушти гравитациското поле на масивниот објект. Ќе ја пресметаме граничната брзина во ваков случај:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{\gamma mM}{R},$$

$$v = \sqrt{\frac{2\gamma M}{R}} = \sqrt{2gR},$$

каде g и R се гравитациското забрзување и радиусот на масивниот објект, соодветно.

Равенки на движење за две произволни маси

За движење на систем од два објекта со произволни маси m_1 и m_2 , може да ги запишеме равенките

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = \frac{\gamma m_1 m_2}{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)^2} (\widehat{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}) = -\mathbf{G},$$

$$m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = -\frac{\gamma m_1 m_2}{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)^2} (\widehat{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}) = \mathbf{G}.$$

Со трансформација на равенките, ја добиваме равенката за релативната положба на објектот 2 во однос на објектот 1 ($\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$):

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{G}}{m_2} + \frac{\mathbf{G}}{m_1} = \frac{\mathbf{G}}{\mu} = -\frac{\gamma \mu (m_1 + m_2)}{\mu r^2} \hat{\mathbf{r}},$$

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\gamma \mu (m_1 + m_2)}{r^2} \hat{\mathbf{r}},$$

каде $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ е редуцираната маса на системот. Според тоа, движењето на систем од два објекти може да се изрази преку движење на еден објект со редуцирана маса под дејство на гравитациската сила од објект со маса еднаква на вкупната маса на системот. Со оглед дека движењето на редуцираната маса е во полето на централна сила, патеката на движење е планарна.

Бидејќи силата е централна, моментот на сила врз честичката со редуцирана маса е нула. Според тоа, нејзиниот момент на импулс е константен со текот на времето:

$$\mathbf{L} = \mu \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}.$$

Брзината ќе ја запишеме во поларни координати,

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta.$$

Со замена, за моментот на импулс добиваме

$$\mathbf{L} = \mu r \mathbf{e}_r \times (\dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta) = \mu \dot{\theta} r^2 \mathbf{e}_z = \mathbf{const}.$$

Вкупната енергија на честичката со редуцирана маса е

$$\begin{aligned} E &= -\frac{\gamma\mu(m_1 + m_2)}{r} + \frac{\mu(\dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta)^2}{2} = -\frac{\gamma\mu(m_1 + m_2)}{r} + \frac{\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)}{2} \\ &= -\frac{\gamma\mu(m_1 + m_2)}{r} + \frac{L^2}{2\mu r^2} + \frac{\mu\dot{r}^2}{2}. \end{aligned}$$

Изразов покажува дека вкупната енергија зависи само од r . Според тоа, движењето на честичката со редуцирана маса од енергетска перспектива може да го разгледуваме како едно-димензионален проблем со ефективна потенцијална енергија

$$U_{eff} = -\frac{\gamma\mu(m_1 + m_2)}{r} + \frac{L^2}{2\mu r^2}.$$

Бидејќи енергијата е константна со текот на времето, со диференцирање добиваме

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\gamma\mu(m_1 + m_2)}{r^2} \dot{r} - \frac{L^2}{\mu r^3} \dot{r} + \mu \dot{r} \ddot{r} = 0,$$

$$\mu \ddot{r} = \frac{L^2}{\mu r^3} - \frac{\gamma\mu(m_1 + m_2)}{r^2}.$$

Променливата r ќе ја изразиме преку аголот θ наместо преку времето за да ја добиеме формата на патеката на движење во поларни координати. Временскиот извод ќе го трансформираме во извод по аголот:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \frac{\partial r}{\partial \theta} = \dot{\theta} \frac{\partial r}{\partial \theta} = \frac{L}{\mu r^2} \frac{\partial r}{\partial \theta},$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{L}{\mu r^2} \frac{\partial r}{\partial \theta} \right) = -\frac{2L}{\mu r^3} \frac{L}{\mu r^2} \frac{\partial r}{\partial \theta} \frac{\partial r}{\partial \theta} + \frac{L}{\mu r^2} \frac{L}{\mu r^2} \frac{\partial^2 r}{\partial \theta^2}.$$

Со замена на променлива, $r = \frac{1}{u}$, добиваме

$$\frac{\partial r}{\partial \theta} = -\frac{1}{u^2} \frac{\partial u}{\partial \theta},$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial \theta^2} = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(-\frac{1}{u^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) = \frac{2}{u^3} \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}.$$

Според тоа,

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{L^2 u^2}{\mu^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}.$$

Со замена во равенката на движење, добиваме

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + u = \frac{\gamma \mu^2 (m_1 + m_2)}{L^2}.$$

Со воведување на нова променлива еднаква на $u - \frac{\gamma \mu^2 (m_1 + m_2)}{L^2}$ добиваме равенка на хармониски осцилатор. Според тоа, решението на диференцијалната равенка е

$$u = \frac{1}{r} = \frac{\gamma \mu^2 (m_1 + m_2)}{L^2} (1 + e \cos \theta),$$

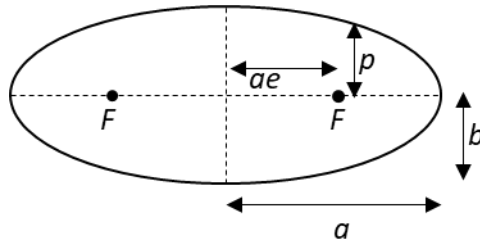
каде e е константа (ексцентрицитет на елипсата) определена од почетните услови. Ако дефинираме

$$p = \frac{L^2}{\gamma\mu^2(m_1 + m_2)},$$

добиваме

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}.$$

Ова е равенка на елипса во поларни координати со координатен почеток во фокусот на елипсата.



Фигура 7.6. Илустрација на главните параметри на елипса.

При $\theta = 0^\circ$ и $\theta = 180^\circ$, ги добиваме минималната и максималната оддалеченост на редуцираната маса од точката на ротација, соодветно:

$$r_{min} = \frac{p}{1 + e},$$

$$r_{max} = \frac{p}{1 - e}.$$

7.5 Кеплерови закони

Постојат три Кеплерови закони кои го опишуваат движењето на планетите околу Сонцето. Согласно првиот Кеплеров закон, планетите во Сончевиот систем се движат по елиптични орбити со Сонцето во нивниот фокус. Овој закон е демонстриран со равенката што ја добивме во претходната секција за $r(\theta)$.

Согласно вториот Кеплеров закон, r поминува еднакви површини за еднакви временски интервали. Елементарната плоштина е

$$dA = \frac{r^2 d\theta}{2}.$$

Според тоа, добиваме

$$\frac{dA}{dt} = \frac{r^2 d\theta}{2 dt} = \frac{r^2}{2} \frac{L}{\mu r^2} = \frac{L}{2\mu} = \text{const.}$$

Ова е математички израз за вториот Кеплеров закон.

Согласно третиот Кеплеров закон, квадратот на периодот на планетарното движење околу Сонцето е пропорционален на кубот на големата полуоска на елипсата. За да го покажеме овој закон, ќе искористиме дека површината на елипса може да се пресмета со формулата

$$A = \pi a^2 \sqrt{1 - e^2}.$$

Според претходната равенка,

$$A = T \frac{L}{2\mu}.$$

Според тоа, добиваме

$$T = \pi a^2 \frac{2\mu}{L} \sqrt{1 - e^2}.$$

Ексцентрицитетот на елипсата ќе го изразиме преку r_{min} и r_{max} , кои може да ги определиме од условот дека \dot{r} е нула во овие две точки. Ако дефинираме $k = \gamma\mu(m_1 + m_2)$, за енергијата во овие две точки добиваме

$$E = -\frac{k}{r} + \frac{L^2}{2\mu r^2}.$$

Решенија на оваа равенка се r_{min} и r_{max} . Равенката ја трансформираме во

$$r^2 + \frac{kr}{E} - \frac{L^2}{2\mu E} = 0.$$

Бидејќи равенката е квадратна, за решенијата може да запишеме

$$r_{min} + r_{max} = -\frac{k}{E},$$

$$r_{min}r_{max} = -\frac{L^2}{2\mu E}.$$

Ако ги поделеме овие две равенки, добиваме

$$\frac{r_{min}r_{max}}{r_{min} + r_{max}} = \frac{L^2}{2\mu k}.$$

Со оглед на геометријата на елипсата, може да запишеме

$$r_{min} = a(1 - e),$$

$$r_{max} = a(1 + e).$$

Со замена во претходниот израз добиваме

$$\frac{a(1 - e^2)}{2} = \frac{L^2}{2\mu k}.$$

Според тоа,

$$(1 - e^2) = \frac{L^2}{\mu ka}.$$

Со замена на овој израз во равенката за периодот, добиваме

$$T = \pi a^2 \frac{2\mu}{L} \sqrt{1 - e^2} = \pi a^2 \frac{2\mu}{L} \sqrt{\frac{L^2}{\mu ka}} = 2\pi \sqrt{\frac{\mu a^3}{k}}.$$

Од оваа равенка добиваме

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2\mu}{k} = \frac{4\pi^2}{\gamma(m_1 + m_2)}.$$

Со користење на апроксимацијата дека масата на планетата е многу помала од масата на Сонцето M , добиваме

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\gamma M}.$$

Оваа равенка е математичкиот израз за третиот Кеплеров закон. Со мерење на полуоската и периодот за дадена планета, од оваа равенка може да ја пресметаме масата на Сонцето.

7.6 Движење по кружна патека

Ќе го разгледаме специјалниот случај кога елипсата станува кружница. Ќе претпоставиме дека масата на ротирачкиот објект е многу помала од масата на “централниот” објект. Во овој случај, можеме да сметаме дека масивниот објект е во центарот на кружницата околу која ротира објектот од интерес. Вториот Њутнов закон при вакво движење околу кружна патека е

$$\frac{\gamma m M}{r^2} = \frac{mv^2}{r},$$

каде M е масата на централниот масивен објект, додека m е масата на ротирачкиот објект. Вкупната енергија за ротирачкиот објект е

$$E = -\frac{\gamma m M}{r} + \frac{mv^2}{2} = -\frac{\gamma m M}{r} + \frac{\gamma m M}{2r} = -\frac{\gamma m M}{2r}.$$

Овој израз покажува дека радиусот на кружната орбита е еднозначно определен со вкупната енергија:

$$r = -\frac{\gamma mM}{2E} = -\frac{k}{2E}.$$

Изразот за вкупната енергија покажува дека таа е негативна и дека тежи кон нула кога радиусот на патеката тежи кон бесконечност. Со замена во вториот Њутнов закон, за брзината добиваме

$$v = \sqrt{-\frac{2E}{m}}.$$

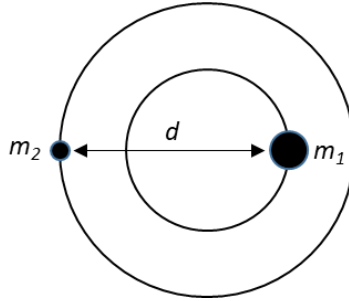
Согласно оваа равенка и брзината е определена само со вкупната енергија. За моментот на импулс добиваме

$$L = mvr = \sqrt{-\frac{mk^2}{2E}}.$$

Овие резултати покажуваат дека енергијата ги определува сите параметри на движењето на ротирачкиот објект околу масивниот објект. Како величина од особен интерес, ќе го пресметаме и периодот на ротација,

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi r}{v} = -\frac{\pi \frac{k}{E}}{\sqrt{-\frac{2E}{m}}} = \sqrt{-\frac{\pi^2 mk^2}{2E^3}}.$$

Пример 7.5. Две ѕвезди со маси m_1 и m_2 на растојание d една од друга ротираат по кружни патеки. Пресметај го периодот на ротација.



Фигура 7.7. Ротација на две ѕвезди околу нивниот центар на маса.

Свездите ротираат околу нивниот центар на маса. Нивните растојанија до центарот на маса се r_1 и r_2 , соодветно. Согласно дефиницијата на координатата на центарот на маса, може да запишеме

$$m_1 r_1 = m_2 r_2.$$

Согласно условот на задачата,

$$r_1 + r_2 = d.$$

Вториот Њутнов закон за двата објекти е

$$\frac{\gamma m_1 m_2}{d^2} = m_1 \frac{4\pi^2}{T^2} r_1,$$

$$\frac{\gamma m_1 m_2}{d^2} = m_2 \frac{4\pi^2}{T^2} r_2.$$

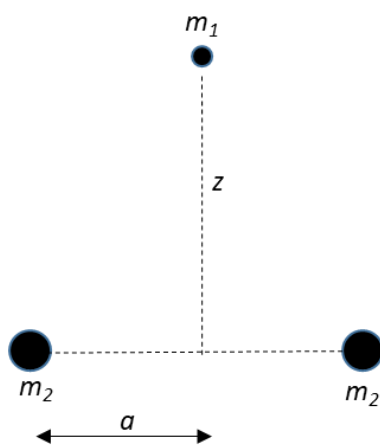
Периодот на ротација е еднаков за двете ѕвезди со оглед на стационарноста на центарот на маса и централниот карактер на гравитациската сила. Со замена, добиваме

$$d = r_1 + r_2 = \frac{\gamma m_2 T^2}{d^2 4\pi^2} + \frac{\gamma m_1 T^2}{d^2 4\pi^2} = \frac{\gamma (m_2 + m_1) T^2}{d^2 4\pi^2}.$$

За периодот добиваме

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 d^3}{\gamma(m_2 + m_1)}}.$$

Пример 7.6. Објект со маса m_1 е во гравитациско поле на два објекти со еднакви маси m_2 на растојание $2a$ еден од друг. Пресметај ја гравитациската сила како функција од вертикалната координата z и анализирај го резултатот за мали и големи вредности на z .



Фигура 7.8. Гравитациска сила од два идентични објекти.

Согласно геометријата на задачата, гравитациската сила е насочена долж вертикалата, со големина

$$F = -\frac{2\gamma m_1 m_2 z}{(a^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Кога $z \gg a$, добиваме

$$F \approx -\frac{2\gamma m_1 m_2}{z^2}.$$

Кога $z \ll a$, добиваме

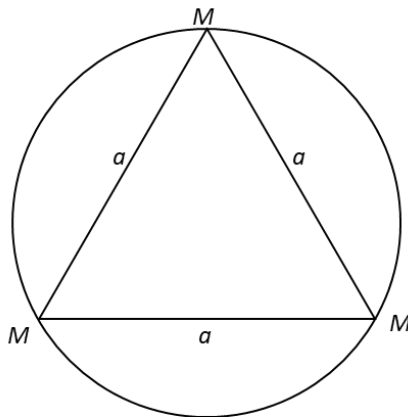
$$F \approx -\frac{2\gamma m_1 m_2 z}{a^3}.$$

Во граничниот случај кога $z = 0$, добиваме $F = 0$, бидејќи силите од двата идентични објекти се еднакви по големина и спротивни по насока. Во другиот граничен случај кога $z \rightarrow \infty$, силата е нула поради тоа што гравитациската сила опаѓа со квадратот на растојанието. Помеѓу овие две гранични точки, модулот на функцијата $F(z)$ има максимум во точка која ќе ја определиме преку нејзиниот прв извод по z :

$$\frac{dF}{dz} = -\frac{2\gamma m_1 m_2}{(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \left(1 - \frac{3z^2}{a^2 + z^2}\right) = 0,$$

$$z = \pm \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Пример 7.7. Три ѕвезди со исти маси M се во конфигурација на рамностран триаголник со страна a и ротираат околу кружница со центар во нивниот центар на маса. Пресметај го нивниот период на ротација.



Фигура 7.9. Ротација на три ѕвезди со исти маси околу кружна патека.

Поради симетричноста на задачата, ќе го пресметаме модулот на гравитациската сила врз една (горната ѕвезда во фигурата) од трите ѕвезди. Долж хоризонталата, компонентата на вкупната гравитациска сила е нула, додека вкупната гравитациска сила долж вертикалата е

$$F = 2 \frac{\gamma M^2}{a^2} \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3} \gamma M^2}{a^2}.$$

Радиусот на кругот и страната на триаголникот се поврзани со релацијата

$$\frac{a}{2R} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Вториот Њутнов закон може да се запише како

$$F = M \frac{4\pi^2}{T^2} R.$$

Со комбинација на овие равенки добиваме

$$\frac{\sqrt{3} \gamma M^2}{a^2} = M \frac{4\pi^2}{T^2} R = M \frac{4\pi^2}{T^2} \frac{a}{\sqrt{3}},$$

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 a^3}{3\gamma M}}.$$

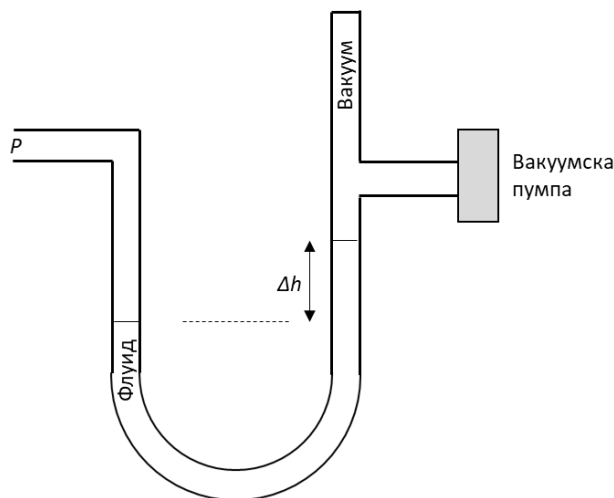
Овој резултат покажува дека, за ваква ѕвездена формација, со мерење на периодот и растојанието помеѓу ѕвездите, може да ја пресметаме нивната маса.

8. ФЛУИДИ

8.1 Вовед

Флуид е супстанца која “тече” и која лесно се деформира согласно формата на “садот” во која се наоѓа. Согласно оваа дефиниција, течности како и гасови припаѓаат во категоријата флуиди. За вакви супстанции, од интерес е да се определат величини како што се притисокот, густината, температурата, или брзината во различни позиции или временски моменти. Вакви анализи се неопходни при дизајн на воздухопловни објекти, бродови, автомобили, системи за наводнување, системи за ладење и греење, итн. Познавањето на механиката на флуиди е исто неопходно за анализа на процеси во биолошки организми каде разни видови на флуидни системи имаат клучна улога.

Една од најважните величини за карактеризација на состојбата на флуидите е нивниот притисок. Притисокот е дефиниран како силата со која флуидот дејствува на единица површина. Се мери во единица N/m^2 која се нарекува паскал (Pa). Со оглед на изотропниот карактер на движењето на молекулите на флуидот, притисокот во флуидот не зависи од ориентацијата на површината во однос на која се пресметува, т.е., притисокот е изотропна величина. “Течниот” карактер на флуидите овозможува рамномерна трансмисија на притисокот низ флуидот, во отсуство на надворешно поле (на пример, гравитација). На пример, притисокот во топка за фудбал или во гума од автомобил е константен во сите позиции во внатрешноста. Ова својство на рамномерна трансмисија на притисокот во флуиди е од голема практична важност.



Фигура 8.1. Илустрација на уред за мерење на притисок наречен манометар.

Уред со кој може да се измери притисокот на воздухот или притисокот на друг гас, кој е во директен контакт со левата страна на уредот, е илустриран во **Фигура 8.1**. Десниот дел на U-цевката е вакумиран со вакуумска пумпа. Поради притисокот на гасот од левата страна на површината на течноста се создава висинска разлика помеѓу површините на течноста на левата и десната страна. Подолу ќе покажеме дека висинската разлика е пропорционална на надворешниот притисок p . Традиционално, жива се користела за мерење на притисок поради нејзината голема густина што овозможува голем притисок да се измери преку мала висинска разлика, што е потребно за компактност на мерниот инструмент. Поради негативните ефекти за животната средина, манометри базирани на жива постепено се заменуваат со други алтернативни уреди побезбедни за околината.

Пример 8.1. Пресметај ја висинската разлика кога манометар е изложен на надворешен притисок p ако густината на течноста во овој мерен уред е ρ .

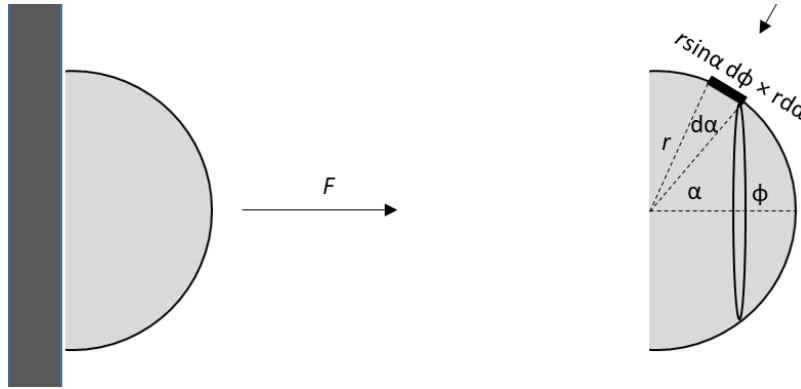
Од дефиницијата за притисок, може да ја изведеме следнава формула:

$$p = \frac{F}{A} = \frac{mg}{A} = \frac{\rho Ag \Delta h}{A} = \rho g \Delta h.$$

При изведувањето, искористивме дека силата со која течноста го компензира надворешниот притисок е гравитациската сила од делот на течноста во висинската разлика. Согласно оваа формула, висинската разлика линеарно зависи од надворешниот притисок. Коефициентот на пропорционалност е определен од густината на флуидот во манометарот.

Пример 8.2. На рамен вертикален сид е поставена метална хемисфера која е идеално вакумирана, т.е., притисокот во нејзината внатрешност е 0. Пресметај колкава сила е потребна за хемисферата да ја одвоиме од сидот.

Силата која ја прилепува хемисферата за сидот е генерирана од разликата во притисок помеѓу надворешната атмосфера (воздух) и внатрешноста на топката (вакуум), како што е илустрирано во фигурата. Поради симетричноста на задачата, вертикалната сила од разликата во притисок е нула, така што доволно е да ја пресметаме само хоризонталната компонентна.



Фигура 8.2. Сила врз хемисфера на вертикален ѕид генерирана од разлика во притисок.

Ако надворешниот притисок го означиме со p , хоризонталната компонента на силата на притисок врз елементарниот дел илустриран на фигурата е

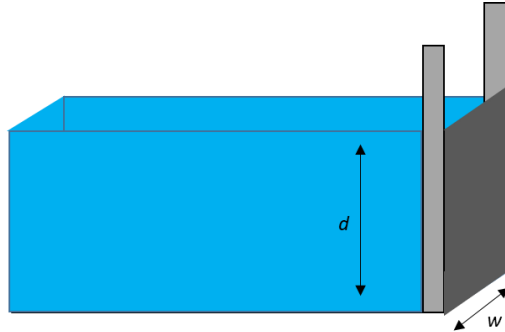
$$F_x = p dA \times \cos \alpha,$$

каде $dA = r \sin \alpha \, d\phi \times r \, d\alpha$ е елементарната површина на хемисферата. Вкупната сила ја добиваме со интегрирање по целата хемисфера:

$$\begin{aligned} F_x &= pr^2 \int \sin \alpha \cos \alpha \, d\phi \, d\alpha = pr^2 \int_0^{\pi/2} \sin \alpha \cos \alpha \, d\alpha \int_0^{2\pi} d\phi = pr^2 \times \frac{1}{2} \times 2\pi \\ &= \pi pr^2. \end{aligned}$$

На пример, дури и ако хемисферата има мал радиус еднаков на 0.2 m, добиваме $F_x \approx 12700 \text{ N}$, што е еквивалентно на гравитациската сила од објект со маса $\approx 1300 \text{ kg}$.

Пример 8.3. Пресметај ја вкупната сила која дејствува врз брана помеѓу два столбови на меѓусебно растојание w , ако длабочината на водата е d .



Фигура 8.3. Сила на притисок врз брана.

Притисокот на водата на дадена длабочина y е

$$p = \rho g y.$$

Според тоа, силата која дејствува на елементарна површина е

$$dF_x = \rho g y w dy.$$

Со интегрирање, за вкупната сила добиваме

$$F_x = \int_0^d \rho g y w dy = \frac{\rho g w d^2}{2}.$$

Пример 8.4. Пресметај како се менува притисокот на воздухот со висината сметајќи дека воздухот се однесува како идеален гас на константна температура.

За идеален гас при константна температура, може да ја запишеме следнава равенка:

$$\frac{p(h)}{p_0} = \frac{\rho(h)}{\rho_0},$$

каде $p(h)$, $\rho(h)$ и p_0 , ρ_0 се притисокот и густината на воздухот на висина h и нулта висина, соодветно. Согласно оваа равенка, може да запишеме

$$dp = -\rho(h)gdh = -\frac{p(h)\rho_0gdh}{p_0}.$$

Од овој израз ја добиваме следнава диференцијална равенка:

$$\frac{dp}{p(h)} = -\frac{\rho_0gdh}{p_0}.$$

Со интегрирање, добиваме

$$p(h) = p_0 \exp\left(-\frac{\rho_0gh}{p_0}\right).$$

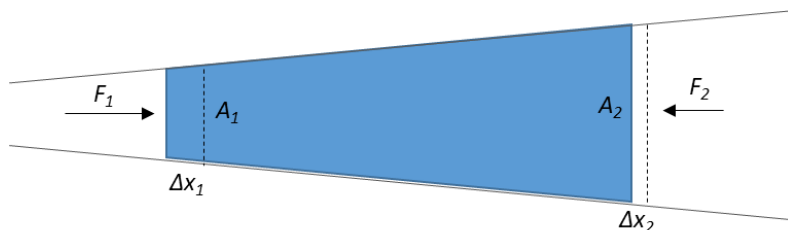
Согласно оваа равенка, притисокот на воздухот експоненцијално се намалува со висината. За мали висини, $h \ll \frac{p_0}{\rho_0g}$, со апроксимирање на претходниот израз, добиваме

$$p(h) \approx p_0 - \rho_0gh.$$

Оваа формула покажува дека, во оваа апроксимација, густината на воздухот може да ја сметаме за константна.

8.2 Паскалов принцип

Согласно овој принцип, притисок во било која точка од просторно-ограничен некомп्रेसибилан флуид се трансмитира подеднакво насекаде во флуидот така што разликите во притисок низ флуидот остануваат исти како тие пред примената на притисокот. Овој принцип може да го илустрираме на следниов начин. Во **Фигура 8.4** е прикажан флуид во цевка со променлив напречен пресек.



Фигура 8.4. Флуид во цевка со променлив напречен пресек.

На граничните напречни пресеци се приложени сили F_1 и F_2 . За просторно-ограничен статичен флуид во отсуство на надворешно конзервативно поле, вкупната извршена работа на овие две сили, при виртуелно елементарно поместување без промена на енергијата на флуидниот елемент, е нула:

$$F_1 \Delta x_1 - F_2 \Delta x_2 = 0.$$

Од условот за константен волумен следи:

$$A_1 \Delta x_1 = A_2 \Delta x_2.$$

Со замена во претходниот израз, добиваме

$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}.$$

Оваа равенка демонстрира дека

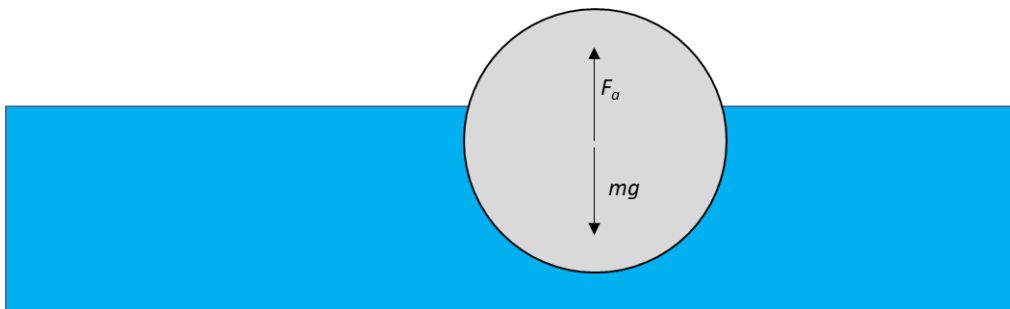
$$p_1 = p_2.$$

Во статичен режим, оваа равенка за константен притисок може да се изведе за било кои два напречни пресеци, што го демонстрира Паскаловиот принцип за константен притисок низ флуидот. Овој принцип има огромна практична примена во инженерството во конструкцијата и работата на хидраулични машини, каде мала влезна сила може да се

трансформира во многу поголема излезна сила со помош на флуид преку варирање на напречниот пресек.

8.3 Архимедова сила

Разгледуваме објект со произволна форма кој плови на површината на флуид, како што е прикажано во **Фигура 8.5**. Бидејќи објектот е во рамнотежа, гравитациската сила врз објектот е компензирана со сила генерирана од флуидот, насочена вертикално нагоре. Оваа сила се нарекува Архимедова сила.



Фигура 8.5. Архимедова сила.

На длабочина d , гравитациската сила генерира дополнителен притисок во флуидот, еднаков на

$$\Delta p = \rho g d,$$

каде ρ е густината на флуидот. Вертикалната компонента на силата која се генерира како резултат на дејството на овој притисок врз елементарна површина dA од објектот е $\rho g d \times dA_x$, каде dA_x е хоризонталната проекција на елементарната површина dA . Бидејќи $d \times dA_x$ е елементарниот волумен зафатен од објектот во флуидот, со интеграција добиваме

$$F_a = \rho g V,$$

каде V е волуменот на потопениот дел од објектот. Оваа формула покажува дека Архимедовата сила по големина е еднаква на гравитациската сила на истиснатиот дел од флуидот зафатен од објектот.

Пример 8.5. Пресметај колкав дел од парче мраз е над површината на водата ако густините на водата и мразот се 920 и 1000 kg/m^3 , соодветно.

Бидејќи парчето мраз е во рамнотежа на површината на водата, Архимедовата и гравитациската сила имаат еднакви големини:

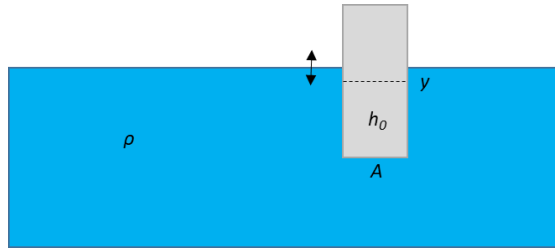
$$\rho g V_{\text{пв}} = \rho_{\text{м}} g V_{\text{м}},$$

каде $V_{\text{пв}}$ и $V_{\text{м}}$ се волуменот на мразот под вода и вкупниот волумен на парчето мраз, додека $\rho_{\text{м}}$ и ρ се густините на мразот и водата, соодветно. Од овој израз, добиваме

$$\frac{V_{\text{пв}}}{V_{\text{м}}} = \frac{\rho_{\text{м}}}{\rho} = 0.92.$$

Овој резултат покажува дека над водата е само 8% од вкупниот волумен на мразот.

Пример 8.6. Пресметај ја густината на водата преку периодот на мали осцилации на цилиндер (со маса M и површина на основата A) на површината на водата.



Фигура 8.6. Мали осцилации на цилиндер на површината на вода.

Во фигурата, отклонувањето на рамнотежното ниво на цилиндерот во однос на површината на водата е означено со y . При вакво отклонување, Њутновиот закон за цилиндерот е

$$\rho g A (h_0 - y) - Mg = M\ddot{y},$$

каде h_0 е висината на потопениот дел во услови на рамнотежа. Бидејќи $\rho g A h_0 = Mg$, добиваме

$$-\rho g A y = M\ddot{y}.$$

Овој израз може да се трансформира во следнава диференцијална равенка од втор ред:

$$\ddot{y} + \frac{\rho g A}{M} y = 0.$$

Оваа равенка покажува дека цилиндерот врши мали хармониски осцилации со период

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{M}{\rho g A}}.$$

Согласно оваа равенка, со мерење на периодот на осцилациите, можеме да ја пресметаме густината на водата знаејќи ја масата и површината на основата на цилиндерот.

8.4 Бернулиева равенка

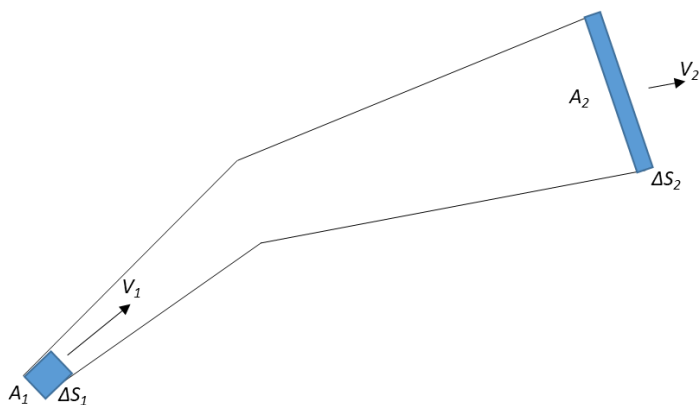
Разгледуваме течење на флуид низ цевка со променлив напречен пресек, како што е прикажано во **Фигура 8.7**. Претпоставуваме дека флуидот е некомп्रेसибилен, што подразбира дека константен волумен во единица време протекува низ било кој напречен пресек на цевката. Овој услов можеме да го запишеме со следнава равенка за произволни два напречни пресеци:

$$A_1 \Delta S_1 = A_2 \Delta S_2,$$

каде ΔS_1 и ΔS_2 се растојанијата што ги поминува флуидот за краток временски интервал Δt . Со користење на изразите $\Delta S_{1,2} = V_{1,2} \Delta t$, каде V е брзината, претходниов израз може да се трансформира во

$$A_1 V_1 = A_2 V_2.$$

Оваа равенка се нарекува равенка на континуитет, која демонстрира дека флуидот има поголема брзина на локации во цевката со помал напречен пресек, додека во позиции со поголем напречен пресек, брзината на флуидот е помала.



Фигура 8.7. Течење на флуид низ цевка со променлив напречен пресек.

Бернулиевата равенка ја добиваме со користење на теоремата за енергија–работа. Го разгледуваме поместувањето на целиот флуид помеѓу напречните пресеци A_1 и A_2 за мал временски интервал Δt . Притисоците во овие две гранични точки ги означуваме со p_1 и p_2 . Извршената работа од граничните сили кои се генерирани од притисоците p_1 и p_2 е еднаква на промената на вкупната енергија (збирот на потенцијалната и кинетичката) на разгледуваниот дел од флуидот. Според ова, може да запишеме

$$p_1 A_1 V_1 \Delta t - p_2 A_2 V_2 \Delta t = \frac{\Delta m_2 V_2^2 - \Delta m_1 V_1^2}{2} + \Delta m_2 g h_2 - \Delta m_1 g h_1.$$

Од равенката на континуитет следи $\Delta m_2 = \Delta m_1 = \rho A_1 V_1 \Delta t = \rho A_2 V_2 \Delta t$. Со користење на овие равенства, претходниов израз може да го трансформираме во

$$p_1 + \frac{\rho V_1^2}{2} + \rho g h_1 = p_2 + \frac{\rho V_2^2}{2} + \rho g h_2.$$

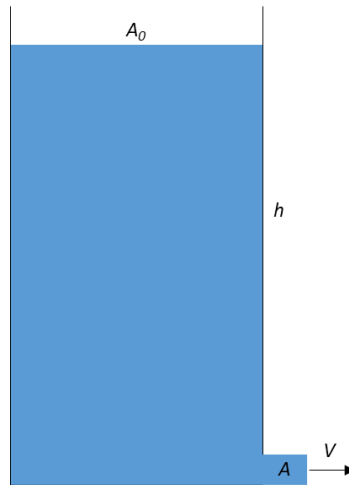
Бидејќи оваа равенка важи за произволни два напречни пресеци, добиваме

$$p + \frac{\rho V^2}{2} + \rho g h = \text{const.}$$

долж целата цевка. Оваа Бернулиева равенка овозможува да се определи промената на притисокот како резултат на промена на висината и/или како резултат на промената на напречниот пресек на цевката, како што е илустрирано преку следниве примери.

Пример 8.7. Широк цилиндричен сад со напречен пресек A_0 и висина h е наполнет со вода. Во долниот дел е направен мал кружен отвор со напречен пресек A од кој истекува водата. Пресметај ја брзината на

водата која истекува на почетокот на истекувањето, и вкупното време на истекување.



Фигура 8.8. Истекување на вода.

Системот цилиндричен сад–отвор ќе го разгледуваме како цевка со два различни напречни пресеци, за која може да ја примениме Бернулиевата равенка:

$$p_0 + \frac{\rho V_0^2}{2} + \rho gh = p_0 + \frac{\rho V^2}{2},$$

каде двата гранични напречни пресеци се изложени на надворешниот атмосферски притисок p_0 . Висината на отворот е 0. Бидејќи садот е широк, многу поширок од отворот, брзината со која се поместува напречниот пресек A_0 е приближно нула. Во оваа апроксимација, равенката се трансформира во следнава поедноставна форма:

$$\rho gh = \frac{\rho V^2}{2}.$$

Од оваа равенка, за брзината добиваме

$$V = \sqrt{2gh}.$$

Овој резултат покажува дека излезната брзина е иста како брзината на објект кој би паднал од истата висина.

За да го пресметаме времето на истекување, после време t , кога напречниот пресек A_0 е на висина y , може да ја запишеме следнава диференцијална равенка:

$$-A_0 dy = A\sqrt{2gy}dt.$$

Со интегрирање, добиваме

$$-2A_0(\sqrt{y} - \sqrt{h}) = A\sqrt{2g}t,$$

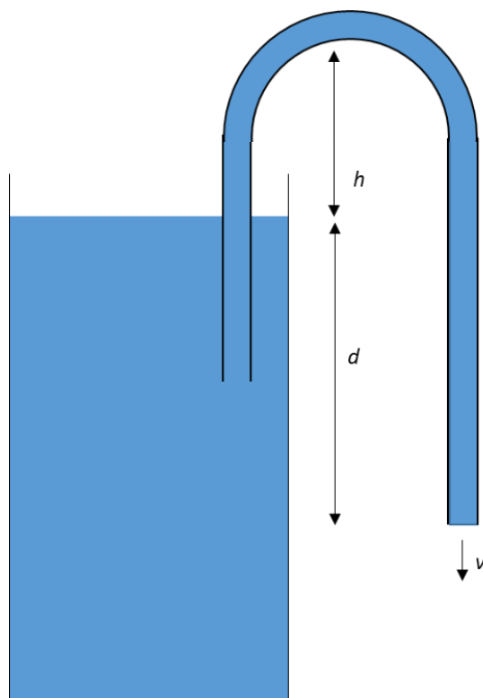
$$y = h\left(1 - \frac{A}{2A_0}\sqrt{\frac{2g}{h}}t\right)^2.$$

Од оваа равенка, за времето на истекување ($y = 0$), добиваме

$$t = \frac{A_0}{A}\sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Овој резултат покажува дека времето на истекување е еднакво на времето на слободно паѓање од истата висина помножено со односот на површините $\frac{A_0}{A}$.

Пример 8.8. Цилиндричен сад се празни со U-цевка. Пресметај со која брзина истекува водата од долниот дел на цевката, и максималната висина на горниот дел на U-цевката при која водата сеуште ќе истекува. Да се претпостави дека садот е многу поширок од цевката.



Фигура 8.9. Празнење на цилиндричен сад со U-цевка.

За системот прикажан во фигурата, ќе ја запишеме Бернулиевата равенка:

$$p_0 + \frac{\rho V_0^2}{2} + 0 = p_0 + \frac{\rho V^2}{2} - \rho g d.$$

При изведувањето на оваа равенка, нултата висина ја поставивме на површината на водата во цилиндричниот сад. Со користење на апроксимацијата дека садот е многу поширок од цевката, може да сметаме дека $v_0 = 0$. Според тоа, ја добиваме следнава равенка:

$$\rho g d = \frac{\rho V^2}{2}.$$

Од оваа равенка, добиваме

$$V = \sqrt{2gd}.$$

Овој резултат покажува дека брзината на истекување е еднаква на брзината на објект кој би паѓал слободно од површината на водата во садот.

Максималната висина на цевката при која водата сеуште ќе истекува ја добиваме со поставување $p = 0$ во најгорниот дел на цевката. Со примена на Бернулиевата равенка за оваа максимална висинска точка и за површината на водата во садот, добиваме

$$p_0 + \frac{\rho V_0^2}{2} + \rho g h_0 = p + \frac{\rho V_m^2}{2} + \rho g h,$$

каде V_m е брзината на водата во максималната висинска точка на цевката. Во граничниот случај кој го разгледуваме, $V_m = 0$, $h_0 = 0$, $V_0 = 0$. Според тоа, равенката се трансформира во

$$p_0 = \rho g h.$$

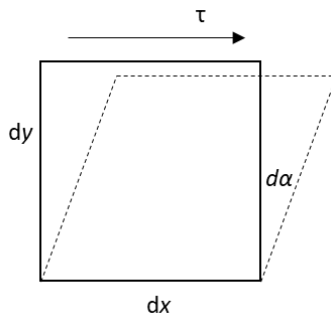
Од оваа равенка, за максималната висина добиваме

$$h = \frac{p_0}{\rho g},$$

каде p_0 е атмосферскиот притисок.

8.5 Вискозност

Една од основите карактеристики на секој флуид е неговата вискозност, што преставува внатрешен сопствен отпор при течењето на флуидот. Разгледуваме ортогонален елемент на флуидот прикажан во **Фигура 8.10**.



Фигура 8.10. Деформација на елемент на вискозен флуид при напрегање на смолкнување.

На горната површина на елементот, проложено е напрегање на смолкнување τ кое го искосува флуидниот елемент за агол $d\alpha$ во временски интервал dt . За многу флуиди, зависноста помеѓу τdt и $d\alpha$ е линеарна со коефициент на пропорционалност кој ја карактеризира вискозноста на флуидот:

$$\tau dt = \mu d\alpha,$$

каде μ е коефициент на динамична вискозност на флуидот.

Согласно оваа равенка, при вакво напрегање, горната површина се движи со брзина поголема од брзината на долната површина за du . Според тоа, може да запишеме

$$du dt = d\alpha dy.$$

Со замена во претходната равенка, добиваме

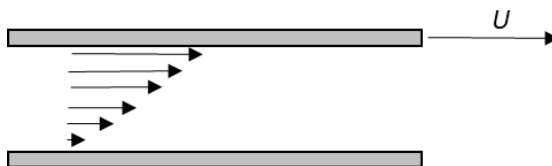
$$\tau = \mu \frac{du}{dy}.$$

Оваа равенка покажува дека напрегањето создава вертикален градиент на брзината во флуидот. Флуидите за кои постои ваква линеарна

зависност помеѓу напрегањето и деформацијата се нарекуваат Њутнови флуиди. Воздухот и водата се репрезентативни примери за Њутнови флуиди во многу широк интервал на надворешни услови.

Типичен пример за супстанца со голема вискозност е медот, околу 1000 пати поголема од вискозноста на водата. Моторните масла се друг карактеристичен пример за супстанции со големи вредности на динамичната вискозност. Согласно добиената равенка, големата вискозност води кон мали брзини на течење на вакви вискозни супстанции.

Линеарната зависност помеѓу напрегањето и деформацијата (т.е., брзината на течење) може да се искористи за да се измери коефициентот на вискозност. Постојат различни геометрии кои може да се искористат за да се измери експериментално вискозноста. Ќе го објасниме планарниот метод илустриран во **Фигура 8.11**.

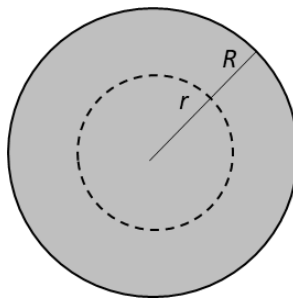


Фигура 8.11. Планарна геометрија за мерење на вискозност на течност. Стрелките ја илустрираат промената на брзината во флуидот долж вертикалата.

Течност за која сакаме да ја измериме вискозноста се поставува помеѓу две тенки рамнини кои се на мало меѓусебно растојание. Долната рамнина е фиксирана, додека горната може да се движи слободно. На горната рамнина аплицираме напрегање на смолкнување, тангенцијална сила на единица површина. Поради динамичната вискозност, во флуидот помеѓу двете рамнини се генерира градиент на

брзина. Со мерење на аплицираната сила на единица површина на горната рамнина, брзината на движење на горната рамнина при вакво напрегање, и растојанието помеѓу двете рамнини, можеме директно да го пресметаме коефициентот на динамична вискозност.

Пример 8.9. Определи ја врската помеѓу протокот и вискозоста при течење на вискозен флуид низ тенок цилиндер со должина L и радиус R .



Фигура 8.12. Течење на вискозен флуид низ цилиндер.

Разликата во притисок помеѓу двата краја на цилиндричната цевка ќе ја означиме со Δp . Ќе претпоставиме дека флуидот во внатрешноста на цевката тече ламинарно, т.е., слоевито долж радијалната насока. Ќе го разгледаме случајот на мали брзини, сметајќи дека слојот до цевката на радиус $r = R$ е стационарен, т.е., има брзина нула, поради контактот со површината. Брзината постепено се зголемува од нула на површината до максимална вредност на централната оска на цилиндерот.

На цилиндричниот елемент ограничен во фигурата со испрекинатите линии дејствуваат две сили со спротивни насоки, силата генерирана од разликата во притисок помеѓу двата краја и вискозната сила која го забавува движењето долж цевката. Според тоа, равенката на движење е

$$\Delta p \pi r^2 = \mu \frac{du}{dr} 2\pi r L,$$

каде u е брзината на флуидот при радиус r .

Со интегрирање и користење на граничните услови, добиваме

$$u(r) = \frac{\Delta p}{4L\mu} (R^2 - r^2).$$

Овој резултат демонстрира параболичен профил на брзината долж радијалната насока.

Волуменот на флуидот во елементарен цилиндричен елемент кој протекува за единица време е

$$dQ = 2\pi r u dr.$$

Со интеграција, добиваме

$$Q = 2\pi \frac{\Delta p}{4L\mu} \int_0^R r(R^2 - r^2) dr = \frac{\pi R^4 \Delta p}{8\mu L}.$$

Оваа формула овозможува да се пресмета неопходната разлика во притисок за да се добие потребниот проток на вискозен флуид низ тенка долга цевка.

8.6 Ламинарност и турбулентност

Во претходната дискусија и примерите, претпоставивме дека течењето на флуидот е ламинарно. Во овој режим на течење, слоевите на флуидот се лизгаат еден над друг на регуларен начин. Овој режим постои кога брзината на течење е мала, и кога вискозноста на флуидот е голема.

Со зголемување на брзината или намалување на вискозноста, течењето може да пројави комплетно различни турбулентни карактеристики со нерегуларни движења вклучувајќи вртлози. Преминот помеѓу ламинарниот и турбулентниот режим е определен од Рејнолдсовиот број:

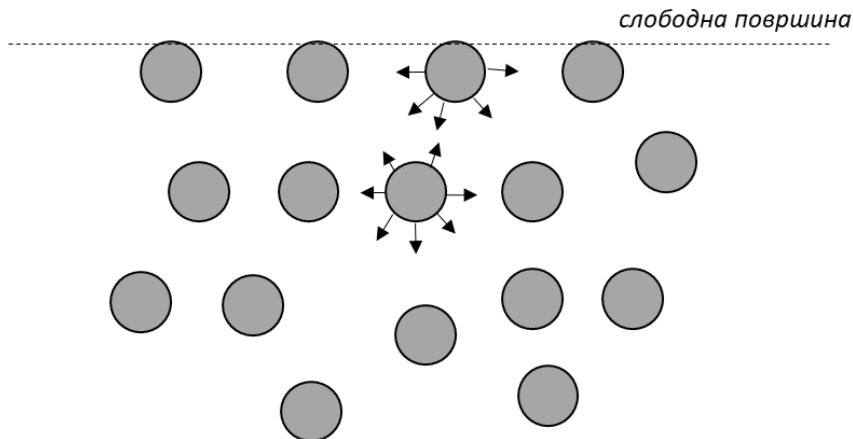
$$Re = \frac{\rho u d}{\mu},$$

каде ρ е густината на флуидот, u е брзината, и d е карактеристична димензија на системот (на пример, дијаметарот на цевка низ која тече флуидот). Рејнолдсовиот број е бездимензионална величина. Определувањето на вредноста на оваа величина за премин помеѓу двата различни начини на течење бара подетална анализа согласно геометријата на конкретниот систем.

8.7 Површински напон

Овој феномен се појавува на слободна површина помеѓу флуид и воздух. Поради површинскиот напон, слободната површина на течноста се однесува како еластична мембрана која се стреми да ја минимизира граничната површина на флуидот.

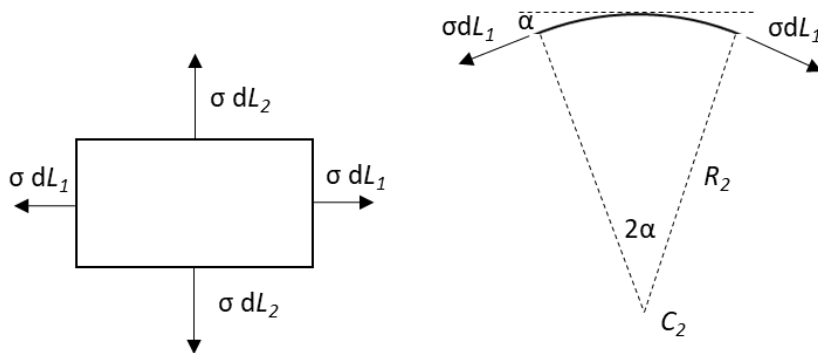
Фигура 8.13 илустрира молекули на флуид и нивните сили на заемнодејство, т.е., меѓумолекуларни сили. Овие сили се генерално привлечни, но стануваат одбивни на мали растојанија помеѓу молекулите. Поради ваквата природа на заемнодејство, флуидот не се шири како гас да го исполни целиот сад во кој се наоѓа, туку зафаќа некој конечен волумен. Во фигурата е прикажана илустрација на флуидот на молекуларно ниво во близина на слободна површина, т.е., во близина на границата со атмосферата (на пример, воздух).



Фигура 8.13. Меѓумолекуларни сили во флуид во близина на слободна површина.

Во фигурата може да се забележи разлика помеѓу внатрешноста и слојот на границата. Во внатрешноста, секоја молекула е “изотропно” опкружена од други молекули на флуидот, додека на границата, резултантната сила на взаемнодејство е насочена кон внатрешноста. Поради овој феномен на површински напон, слободната површина на флуидот се однесува како затегната еластична мембрана која се стреми да ја минимизира граничната површина на флуидот за постигнување на енергетски постабилна состојба.

Поради овој ефект на површински напон, мали капки на вода генерирани од спреј, каде површинскиот напон преовладува над други ефекти, се сферични. При константниот волумен на капката, вкупната гранична површина се минимизира со формирање на сферна слободна површина.



Фигура 8.14. Гранична површина на флуид.

Разгледуваме ортогонален граничен елемент на флуид на произволна површина со ортогонални радиуси на закривеност R_1 и R_2 . Во случај на сфера, $R_1 = R_2 = R$. Левиот дел од **Фигура 8.14** го илустрира овој мал правоаголен елемент на површината погледнат од горе. Страните на овој елемент се dL_1 и dL_2 . Разликата во притисок помеѓу внатрешноста на флуидот и атмосферата ја означуваме со Δp . Десниот дел од фигурата ги илустрира силите на површински напон кои делуваат долж двете страни со должини dL_1 . Овие сили ги добиваме како производ помеѓу површинскиот напон и должината по која дејствува силата на површински напон. Според тоа, површинскиот напон го дефинираме како сила на единица должина. Со оглед на радиусот на закривеност R_2 , збирот на овие две тангенцијални сили дава резултантна сила кон центарот за закривеноста “2”:

$$dF_2 = \alpha\sigma dL_1 + \alpha\sigma dL_1 = 2\alpha\sigma dL_1 = \frac{\sigma dL_1 dL_2}{R_2}.$$

Ако спроведеме слична анализа за закривеноста “1”, добиваме

$$dF_1 = \frac{\sigma dL_1 dL_2}{R_1}.$$

Вкупната сила врз овој елемент е збир на dF_1 и dF_2 :

$$dF = \sigma dL_1 dL_2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right).$$

Оваа резултантна сила врз разгледуваниот правоаголен елемент е компензирана од силата генерирана од разликата во притисок помеѓу внатрешноста на флуидот и атмосферата:

$$\Delta p dL_1 dL_2 = \sigma dL_1 dL_2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right).$$

Според тоа, ја добиваме следнава релација помеѓу разликата во притисок и закривеноста на површината:

$$\Delta p = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right).$$

За сферна капка, добиваме

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{R},$$

додека за сферен меур за разликата во притисок помеѓу внатрешноста на меурот и атмосферата добиваме

$$\Delta p = \frac{4\sigma}{R},$$

бидејќи меурот има две површини, внатрешна и надворешна, кои придонесуваат идентично во разликата во притисок.

Освен што површинскиот напон може да се изрази како сила на единица должина на слободната површина, може да го претставиме и како енергија на единица површина од флуидот. Бидејќи силата на површински напон дејствува тангенцијално на површината, извршената работа при елементарно поместување ds е

$$dW = \sigma dl \times ds = \sigma dA,$$

каде dA е промената на површината при ова елементарно поместување. Од овој израз следи дека коефициентот на површински напон е всушност енергија на единица слободна површина на флуидот. За границата вода–воздух, измерената вредност на овој коефициент е $\sigma = 0.072 \text{ J m}^{-2}$ на $25 \text{ }^\circ\text{C}$.

Проценка на вредноста на површинскиот напон

Во рамките на следнава многу груба проценка на вредноста на површинскиот напон, сметаме дека молекулите на флуидот се во кубна структура со растојание помеѓу соседни молекули еднакво на L . Специфичната топлина на испарување на флуидот ќе ја означиме со h . Енергијата на сврзување на секоја молекула во флуидот може да ја процениме како

$$\gamma \sim hm,$$

каде m е масата на молекула од флуидот. Во ваква кубна структура, секоја молекула во внатрешноста има шест соседи, додека бројот на соседи на површината е пет. Според тоа, енергијата за да се создаде таква слободна површина е еднаква на енергијата на раскинување на една молекуларна врска. Согласно оваа апроксимација, може да запишеме

$$\sigma L^2 \sim \frac{\gamma}{6} \sim \frac{hm}{6}.$$

Ако масата на една молекула ја изразиме преку густината на флуидот, добиваме

$$\sigma \sim \frac{hm}{6L^2} \sim \frac{h\rho L^3}{6L^2} \sim \frac{h\rho L}{6},$$

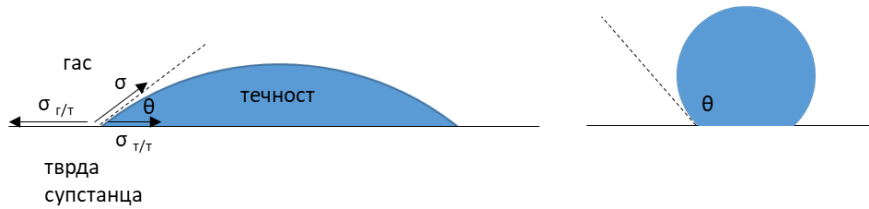
каде ρL е површинската густина на маса на мономолекуларен слој (дебелина еднаква на меѓумолекуларното растојание). Со замена на вредностите на 25 °C, добиваме $\sigma \sim 0.126 \text{ J m}^{-2}$, што е “доволно добра” проценка за површинскиот напон со оглед на грубите апроксимации во моделот.

8.8 Контактен агол

Во **Фигура 8.15** е прикажана капка на флуид на тврда површина. Системот се состои од три различни супстанции: флуидот, атмосферата (воздух), и цврстата површина. Во отсуство на цврстата површина, флуидот ќе формира сферна гранична површина поради површинскиот напон за да ја минимизира енергијата. Поради присуството на цврстата површина, на контактната линија, т.е., границата помеѓу флуидот, воздухот, и тврдата површина, дејствуваат три сили на површински напон, долж соодветните тангенти, определени со коефициентите $\sigma_{г/т}$ (граница гас–тврда површина), $\sigma_{т/т}$ (граница течност–тврда површина), и σ (граница течност–воздух). Во рамнотежната состојба, компонентите на овие три сили врз контактната линија долж цврстата површина се компензираат:

$$\sigma_{г/т} = \sigma \cos\theta + \sigma_{т/т},$$

каде θ се нарекува контактен агол. Согласно фигурата, постои нормална резултантна сила, која се компензира со силата на адхезија помеѓу цврстата површина и течноста. Согласно оваа равенка, контактниот агол е определен од трите коефициенти на површински напон.

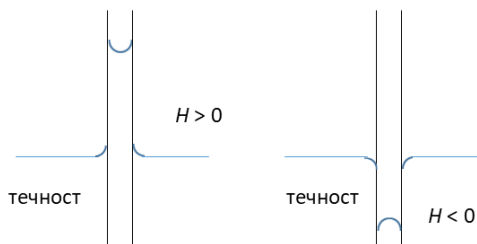


Фигура 8.15. Контактен агол: (лево) остар (на пример, за вода на стаклена површина), (десно) тап (жива на стаклена површина).

За вода на стаклена површина, контактниот агол е приближно нула, додека жива на стаклена површина формира тап контактен агол од 140° . Оваа разлика се појавува поради доминацијата на силата на адхезија на течноста кон тврдата површина (случај вода–стакло) или обратно, доминација на меѓумолекуларните сили во течноста над силата на адхезија кон цврстата површина (случај жива–стакло).

8.9 Капиларност

Ефектите на површински напон се изразени во тенки капилари (на пример, тенок цилиндричен сад со радиус многу помал од неговата должина). Кога таков капилар е потопен во течност, нивото на течноста во капиларот се разликува од референтното ниво на течноста надвор од капиларот. Вода во стаклен капилар се искачува над референтното ниво, додека жива во стаклен капилар се спушта под референтното ниво, како што е илустрирано во **Фигура 8.16**. Оваа разлика се појавува поради различниот контактен агол, т.е., различните коефициенти на површински напон. На површината на течноста се формира закривеност, т.е., менискус.



Фигура 8.16. Капиларни ефекти.

Ќе го разгледаме случајот кога $H > 0$. Радиусот на капиларот е r . Поради цилиндричната симетрија, должината на контактната линија е $2\pi r$. Силата со која искачениот течен столб се држи за капиларниот ѕид е $\sigma 2\pi r$. Вертикалната компонента на оваа сила ја компензира гравитациската сила врз течниот столб, додека хоризонталната компонента е нула поради цилиндричната геометрија. Според тоа, во рамнотежна состојба, може да запишеме

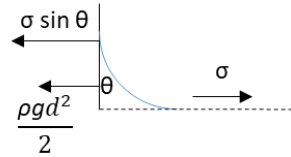
$$\sigma 2\pi r \cos\theta = \rho g H \pi r^2.$$

За висината до која се искачува течниот столб добиваме

$$H = \frac{2\sigma \cos\theta}{\rho g r}.$$

Во случајот за тап контактен агол, добиваме негативна вредност, т.е., може да ја пресметаме висината до која се спушта течниот столб во однос на референтното ниво.

Пример 8.10. Пресметај ја висината на менискусот на флуид во контакт со вертикален рамен ѕид.



Фигура 8.17. Менискус на рамен сид.

Во случај на вертикален рамен сид, геометријата на задачата е планарна. Поради површинскиот напон, ќе се формира висинска разлика d на рамниот сид во однос на референтното ниво на течноста. Далеку од сидот, површината на флуидот станува хоризонтална. За да ја најдеме висината на контактната линија на сидот во однос на референтното ниво, ќе го запишеме балансот на хоризонталните компоненти на силите врз флуиден елемент кој се наоѓа од сидот до некое растојание каде површината е практично хоризонтална.

Врз овој елемент со должина L , дејствуваат три сили: силата на површински напон на делот до сидот со хоризонтална проекција $\sigma \sin\theta$ L , каде θ е контактниот агол, силата на површински напон на делот каде површината е хоризонтална, $-\sigma L$, и силата генерирана од притисокот на течноста кој се зголемува со длабочината. Оваа сила ја пресметуваме со интегралот $L \int_0^d \rho g z dz = L \frac{\rho g d^2}{2}$. Според тоа, во рамнотежа, добиваме

$$L \frac{\rho g d^2}{2} + L \sigma \sin\theta = L \sigma,$$

$$d = 2 \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g} \cos \frac{\theta}{2}}.$$

Во случајот на вода во контакт со стаклен сид каде контактниот агол е приближно нула, добиваме $d \approx 3.9$ mm.

Пример 8.11. Процени го радиусот на капка вода во слободен пад за кој ефектите на гравитација се занемарливи во однос на ефектите на површинскиот напон.

При слободен пад на капка вода, силата на отпорот на воздухот се компензира со гравитациската сила по достигнувањето на максималната брзина. За големи капки, овие ефекти се значителни, и може да влијаат на формата. За да добиеме капка со форма која не зависи од гравитациските ефекти и од силата на отпор на воздухот, потребно е варијацијата на притисокот внатре во капката која резултира од гравитациските ефекти да биде мала во споредба со зголемувањето во притисок во однос на атмосферата поради ефектот на површински напон.

Согласно оваа анализа, во случај на сферна капка каде ефектот на површински напон преовладува, може да ја запишеме равенката

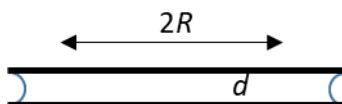
$$\frac{2\sigma}{R} \gg \rho g 2R.$$

Од оваа равенка, за критичниот радиус добиваме

$$R = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}}.$$

За границата вода–воздух, добиваме $R = 2.7 \text{ mm}$ на $25 \text{ }^\circ\text{C}$. Капки со помали радиуси од овој граничен радиус ќе имаат сферна форма при слободен пад.

Пример 8.12. Процени ја силата која е потребна да се одделат две кружни стаклени површини со радиус R помеѓу кои има тенок слој на вода со дебелина d .



Фигура 8.18. Одделување на две стаклени површини помеѓу кои има тенок слој на вода.

Водата со стаклената површина формира контактен агол приближно еднаков на нула. Според тоа, во случај на мало оддалечување помеѓу стаклените површини и целосно исполнување на просторот помеѓу површините со воден филм, закривеноста на границите на водениот филм ќе ја апроксимираме со $R_1 = \infty$ и $R_2 = d/2$.

Според тоа, разликата во притисок помеѓу атмосферата и внатрешноста на флуидот е

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{d}.$$

Оваа разлика во притисок ќе генерира сили кои ги привлекуваат стаклените површини:

$$\Delta p = \frac{F}{\pi R^2},$$

каде F е силата која треба да се приложи на секоја од површините за нивно одделување. Со замена во претходната равенка, добиваме

$$\frac{2\sigma}{d} = \frac{F}{\pi R^2},$$

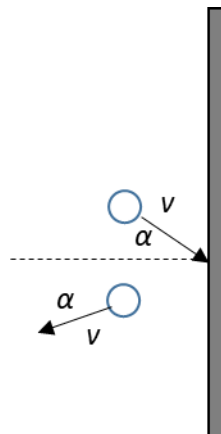
$$F = \frac{2\sigma\pi R^2}{d}.$$

9. ОСНОВИ НА МОЛЕКУЛАРНО-КИНЕТИЧКА ТЕОРИЈА НА ИДЕАЛНИ ГАСОВИ

9.1 Вовед

Во ова поглавје, ќе ги презентираме основните теориски концепти на молекуларната кинетика на идеални гасови. Главната цел на оваа теорија е да ги поврзе макроскопските параметри на гасовите како што се притисокот, волуменот кој го зафаќаат, и температурата со нивното внатрешно движење на молекуларно ниво. Терминот идеален гас се користи како теориски концепт за гас во кој молекулите не зафаќаат простор, т.е., се третираат како материјални точки, и немаат меѓусебни судири. Согласно овој концепт, во широк интервал на надворешни услови, голем број на реални гасови може апроксимативно да ги опишеме како идеални гасови, и да ги предвидиме нивните макроскопски својства.

Молекулите на идеален гас се судираат единствено со “сидовите” на просторот во кој се наоѓаат. Во **Фигура 9.1** е прикажана молекула на идеален гас која се движи со брзина v и се судира со сидот под агол α .



Фигура 9.1. Илустрација на судирот на молекула на идеален гас со вертикален сид.

По судирот со ѕидот, молекулата ќе се одбие со истата брзина со агол на одбивање еднаков по големина на упадниот агол. При ова одбивање, промената на хоризонталната компонента на импулсот на молекулата е

$$\Delta p_x = 2mv_x,$$

каде m е масата на молекулата. Согласно оваа равенка, средната сила со која молекулата дејствува врз ѕидот при судирот е $\frac{2mv_x}{\Delta t}$, каде Δt е времето на судир.

Идеалниот гас е систем од огромен број на молекули кои се движат со различни брзини во различни насоки. Според тоа, постои функција на дистрибуција на брзината на молекулите на идеалниот гас, $n(v_x, v_y, v_z)$. Бројот на молекули кои имаат компоненти на брзина во интервалот dv_x, dv_y, dv_z околу брзината v_x, v_y, v_z може да го пресметаме како $n(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z$.

Разгледуваме површина A на ѕидот. За инфинитезимално време dt , на оваа површина на ѕидот ќе удрат

$$\int_{v_z=-\infty}^{\infty} \int_{v_y=-\infty}^{\infty} \int_{v_x=0}^{\infty} \frac{Av_x dt}{V} n(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z$$

молекули, каде V е волуменот кој го зафаќа гасот. Секоја од нив дејствува со сила врз ѕидот при судирот. Резултантната сила врз ѕидот е

$$\int_{v_z=-\infty}^{\infty} \int_{v_y=-\infty}^{\infty} \int_{v_x=0}^{\infty} 2mv_x \frac{Av_x}{V} n(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z.$$

Поради изотропноста на идеалниот гас, функцијата на дистрибуција по брзината е инваријантна по промена на знакот на брзината. Според тоа, интегралот може да го запишеме по целиот брзински простор. За

притисокот врз површината, дефиниран како сила врз единица површина, добиваме

$$p = \frac{m}{V} \int v_x^2 n(v_x, v_y, v_z) d^3v.$$

Повторно, со оглед на изотропноста на дистрибуцијата на брзината, може да запишеме

$$p = \frac{m}{3V} \int v^2 n(v_x, v_y, v_z) d^3v = \frac{mN \langle v^2 \rangle}{3V},$$

каде N е вкупниот број на молекули во идеалниот гас. Од оваа равенка, добиваме

$$pV = \frac{2}{3} \langle E \rangle,$$

каде $\langle E \rangle$ е средната вкупна кинетичка енергија на идеалниот гас.

Согласно оваа равенка, при фиксен волумен, притисокот на гасот линеарно расте со средната кинетичка енергија. Средната вкупна кинетичка енергија на идеалниот гас е макроскопска статистичка величина. Оваа средна енергија на гасот зависи од бројот на молекули и од температурата на која се наоѓа идеалниот гас.

Термодинамичката температура всушност ја определува средната кинетичка енергија на една молекула, т.е., може да се дефинира преку средната кинетичка енергија на една молекула на идеален гас. Претходната равенка може да ја трансформираме во

$$pV = Nk_B T = \frac{2}{3} \langle E \rangle,$$

каде коефициентот на пропорционалност се нарекува Болцманова константа, $k_B = 1.38 \times 10^{-23} \text{ m}^2 \text{ kg s}^{-2} \text{ K}^{-1}$. Од оваа равенка следи дека средната енергија на една молекула е

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{3}{2} k_B T.$$

Бидејќи молекулата ја разгледуваме како материјална точка со три трансляторни степени на слобода, средната енергија за секој степен на слобода е $\frac{k_B T}{2}$.

9.2 Максвелова дистрибуција на брзината

Поради изотропноста на идеалниот гас, функцијата на дистрибуција на брзината зависи само од модулот на брзината, не од нејзините компоненти. Според тоа, може да запишеме

$$n(\mathbf{v}) = F(v^2),$$

каде $F(v^2)$ е функција која треба да ја определиме. Поради независноста на дистрибуцијата на брзината v_x од дистрибуциите на v_y и v_z , функцијата на дистрибуција F може да ја запишеме како производ:

$$F(v^2) = f(v_x)f(v_y)f(v_z),$$

каде искористивме дека функцијата на дистрибуција на секоја компонента е идентична за сите три компоненти поради изотропноста. Ако поставиме $v_y = v_z = 0$, добиваме

$$F(v_x^2) = f^2(0)f(v_x).$$

Од оваа равенка следи

$$f(v_x) = \frac{F(v_x^2)}{f^2(0)}.$$

Со замена, добиваме

$$F(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = \frac{1}{f^6(0)} F(v_x^2)F(v_y^2)F(v_z^2).$$

Со парцијално диференцирање по квадратот на една од компонентите на брзината, може да се покаже дека решението F на оваа равенка е експоненцијалната функција:

$$F(v^2) = A \exp(-\gamma v^2).$$

Според тоа, функцијата на дистрибуција на брзината е

$$n(\mathbf{v}) = A \exp(-\gamma v^2).$$

Оваа функција на дистрибуција содржи две константи кои може да се определат преку температурата и условот за нормирање. Со интегрирање на функцијата на дистрибуција, добиваме

$$\begin{aligned} N &= \int n(\mathbf{v}) dv_x dv_y dv_z = A \int \exp(-\gamma(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)) dv_x dv_y dv_z \\ &= A \left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\gamma v_x^2) dv_x \right)^3 = A \left(\frac{\pi}{\gamma} \right)^{3/2}. \end{aligned}$$

Според тоа,

$$A = N \left(\frac{\gamma}{\pi} \right)^{3/2}.$$

Константата γ ќе ја определиме од условот средната кинетичка енергија на една молекула да е еднаква на $\frac{3}{2} k_B T$:

$$\int \frac{mv^2}{2} N \left(\frac{\gamma}{\pi} \right)^{3/2} \exp(-\gamma v^2) dv_x dv_y dv_z = \frac{3}{2} N k_B T.$$

Од оваа равенка, добиваме

$$\frac{m}{2} \left(\frac{\gamma}{\pi} \right)^{3/2} \int v^2 \exp(-\gamma v^2) dv_x dv_y dv_z = \frac{3}{2} k_B T.$$

Интегралот може да го трансформираме во сферни координати:

$$\int v^2 \exp(-\gamma v^2) dv_x dv_y dv_z = \int v^2 \exp(-\gamma v^2) 4\pi v^2 dv = 4\pi \frac{3\sqrt{\pi}}{8\gamma^{5/2}}.$$

Со замена во претходниот израз, добиваме

$$\frac{m}{2} \left(\frac{\gamma}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} 4\pi \frac{3\sqrt{\pi}}{8\gamma^{\frac{5}{2}}} = \frac{3}{2} k_B T,$$

$$\gamma = \frac{m}{2k_B T}.$$

Со замена во функцијата на дистрибуција на брзината, добиваме

$$n(\mathbf{v}) = N \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right).$$

Со оглед на сферната симетрија, оваа функција може да ја искористиме да ја добиеме функцијата на распределба на модулот на брзината $g(v)$:

$$g(v)dv = 4\pi v^2 dv \frac{n(\mathbf{v})}{N},$$

$$g(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right).$$

Оваа нормирана функција на распределба на модулот на брзината се нарекува Максвел-Болцманова дистрибуција, која може да се искористи да се пресмета средната вредност на модулот на брзината, најверојатната вредност на модулот на брзината, како и средно-квadratната брзина.

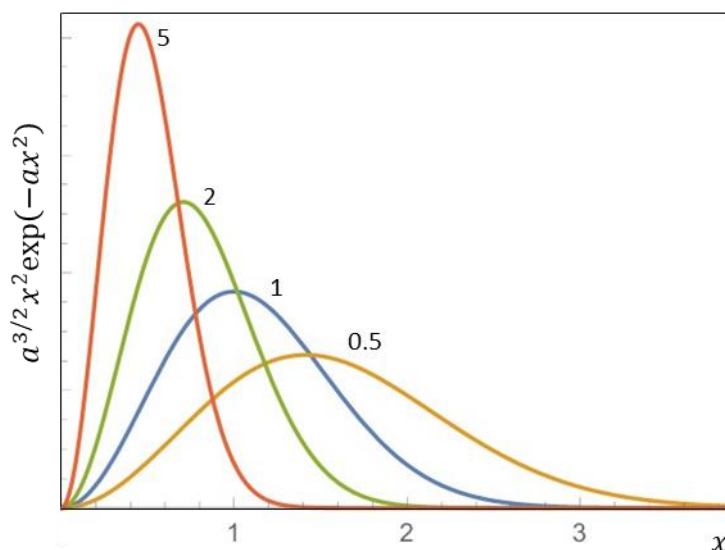
Попрактично е во формулата да биде моларната маса наместо масата на еден молекул на гасот. За таа цел, ќе ги искористиме следниве равенства

$$mN_A = M, k_B N_A = R,$$

каде M е моларната маса, N_A е Авогадровиот број, додека $R = 8.31 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$ се нарекува универзална гасна константа. Со замена, добиваме

$$g(v) = 4\pi \left(\frac{M}{2\pi RT} \right)^{3/2} v^2 \exp\left(-\frac{Mv^2}{2RT} \right),$$

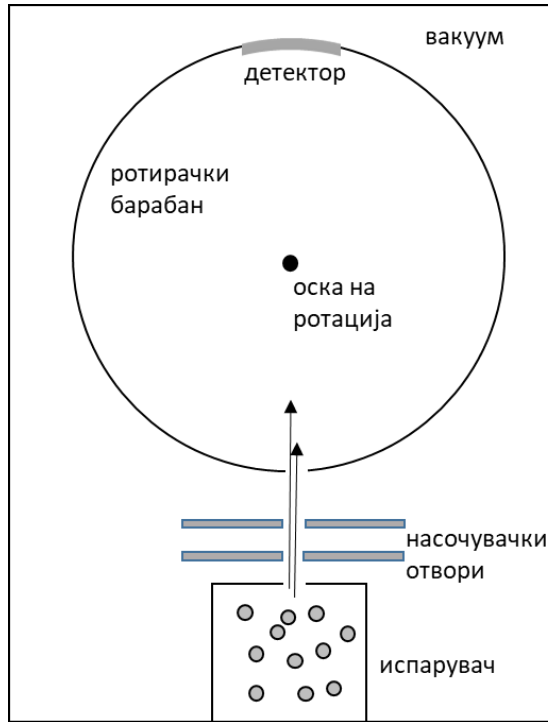
што е попрактична форма на Максвел-Болцмановата дистрибуција. Графикот на оваа функција во бездимензионална форма е прикажан во **Фигура 9.2**.



Фигура 9.2. $a^{3/2}x^2 \exp(-ax^2)$ за различни вредности на параметарот a прикажани во фигурата. Помала вредност на a одговара на повисока температура, и обратно.

Согласно графиците во фигурата, на ниски температури добиваме полокализирана дистрибуција на брзината со мала најверојатна брзина (која одговара на пикот на функцијата), додека поширока дистрибуција се добива на повисоки температури, со поголема најверојатна брзина.

Максвел-Болцмановата дистрибуција на брзината на идеален гас може да се докаже со експериментот илустриран во **Фигура 9.3**. Системот (под вакуум) се состои од испарувач, каде парче метал (на пример, бизмут) се загрева на висока температура за да се трансформира во идеален моноатомски гас. Над овој испарувач се наоѓаат насочувачки отвори кои создаваат тенок сноп на атоми насочени вертикално нагоре кон ротирачки барабан. На површината на барабанот е направен мал отвор. При ротацијата, во краток временски интервал, отворот е директно над испарувачот. Во тие моменти, во барабанот навлегуваат атоми на бизмут со различни брзини согласно Максвел-Болцмановата дистрибуција. На барабанот е прикачен детектор во форма на лента кој може да детектира број на атоми кои упаѓаат на него долж неговата должина. Бидејќи брзината на атомите кои влегуваат во барабанот е различна, и бидејќи детекторот ротира заедно со барабанот, атоми со различни брзини ќе удрат на различни латерални позиции на детекторот. Со анализа на бројот на удари за различни позиции, може да се добие визуелен приказ на дистрибуцијата на брзини. Вакви експерименти директно ја потврдиле Максвел-Болцмановата дистрибуција уште во 1930те години.



Фигура 9.3. Експеримент за демонстрација на Максвел-Болцмановата дистрибуција.

Пример 9.1. Пресметај ја најверојатната брзина, средната брзина, средно-квадратната брзина, и средната релативната брзина помеѓу два молекули на идеален гас.

Најверојатната брзина ќе ја определиме преку позицијата на пикот на функцијата на распределба

$$g(v) = 4\pi \left(\frac{M}{2\pi RT} \right)^{3/2} v^2 \exp\left(-\frac{Mv^2}{2RT} \right).$$

Со диференцирање и изедначување со нула, за најверојатната брзина добиваме:

$$2v \exp\left(-\frac{Mv^2}{2RT}\right) - v^2 \exp\left(-\frac{Mv^2}{2RT}\right) \frac{Mv}{RT} = 0,$$

$$v_H = \sqrt{\frac{2RT}{M}}.$$

Средната брзина ја пресметуваме со интегралот

$$\begin{aligned} \langle v \rangle &= \int_0^{\infty} v 4\pi \left(\frac{M}{2\pi RT}\right)^{3/2} v^2 \exp\left(-\frac{Mv^2}{2RT}\right) dv \\ &= 2\pi \left(\frac{M}{2\pi RT}\right)^{3/2} \int_0^{\infty} x \exp\left(-\frac{Mx}{2RT}\right) dx = 2\pi \left(\frac{M}{2\pi RT}\right)^{3/2} \left(\frac{2RT}{M}\right)^2 \\ &= \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}. \end{aligned}$$

За средната вредност на квадратот на брзината добиваме

$$\begin{aligned} \langle v^2 \rangle &= \int_0^{\infty} v^2 4\pi \left(\frac{M}{2\pi RT}\right)^{3/2} v^2 \exp\left(-\frac{Mv^2}{2RT}\right) dv \\ &= 4\pi \left(\frac{M}{2\pi RT}\right)^{3/2} \int_0^{\infty} v^4 \exp\left(-\frac{Mv^2}{2RT}\right) dv \\ &= 4\pi \left(\frac{M}{2\pi RT}\right)^{3/2} \frac{3\sqrt{\pi}}{8} \left(\frac{2RT}{M}\right)^{5/2} = \frac{3RT}{M}. \end{aligned}$$

Според тоа,

$$\sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}.$$

Ако молекул 1 и молекул 2 се движат со брзини v_1 и v_2 , модулот на нивната релативна брзина е

$$u = \sqrt{(v_1 - v_2)^2}.$$

Со квадрирање на оваа равенка и пресметување на средна вредност добиваме

$$\langle u^2 \rangle = \langle (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2 \rangle = \langle \mathbf{v}_1^2 + \mathbf{v}_2^2 - 2\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \rangle = 2\langle \mathbf{v}^2 \rangle - 2\langle \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \rangle.$$

Бидејќи брзините на молекул 1 и молекул 2 се меѓусебно независни, вториот член е нула. Според тоа, за релативната брзина добиваме

$$\sqrt{\langle u^2 \rangle} = \sqrt{\frac{6RT}{M}}.$$

9.3 Болцманова функција на распределба

Разгледуваме вертикален столб на идеален гас на константна температура. Равенката за идеален гас

$$pV = Nk_B T$$

ја изведовме со пресметување на притисокот на идеалниот гас и негово поврзување со средно-квадратната брзина. Според тоа, оваа равенка на состојба на идеален гас се добива без да се знае конкретната форма на дистрибуцијата на брзините на молекулите. Равенката ќе ја запишеме преку концентрацијата n на идеалниот гас:

$$p = nk_B T.$$

Согласно оваа равенка, притисокот е директно определен од концентрацијата на идеалниот гас при фиксна температура. Поради ефектот на гравитацијата, разликата во притисок при елементарна промена на висината на воздушниот столб е

$$dp = -mngdh.$$

Со диференцирање на равенката на состојба на идеалниот гас добиваме

$$dp = dn k_B T.$$

Со замена во претходната равенка, ја добиваме следнава диференцијална равенка:

$$\frac{dn}{n} = -\frac{mg}{k_B T} dh.$$

Со интегрирање, добиваме

$$\ln n = -\frac{mgh}{k_B T} + \ln n_0,$$

каде n_0 е концентрацијата на идеалниот гас на нулта висина. По трансформација на изразот, добиваме

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{mgh}{k_B T}\right).$$

Оваа равенка покажува дека концентрацијата експоненцијално се намалува со зголемување на висината од референтното нулто висинско ниво. Оваа формула може да ја запишеме преку потенцијалната енергија E_p на молекулот на висина h :

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{E_p}{k_B T}\right).$$

Според тоа, веројатноста молекулот да се најде на висина h е

$$p_h = \exp\left(-\frac{E_p}{k_B T}\right).$$

Оваа просторна дистрибуција воопшто не зависи од конкретната форма на дистрибуцијата на брзините на молекулите. Функцијата на распределба по брзина

$$n(\mathbf{v}) = N \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right)$$

ќе ја запишеме преку кинетичката енергија:

$$n(\mathbf{v}) = N \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{E_k}{k_B T} \right).$$

Согласно оваа равенка, веројатноста за наоѓање на молекулата во брзинскиот интервал со димензии $dv_x dv_y dv_z$ е пропорционална со $\exp \left(-\frac{E_k}{k_B T} \right)$. Множителот пред експонентот се појавува поради условот за нормирање на вкупната веројатност. Експонентите се идентични за двете распределби, по брзина и по положба. Ова подразбира дека во генерализираниот фазен простор на просторни координати и брзини, веројатноста за наоѓање на молекулата во елементот $dv_x dv_y dv_z dx dy dz$ е пропорционална на $\exp \left(-\frac{E_k}{k_B T} \right) \left(-\frac{E_p}{k_B T} \right)$ поради независноста на распределбите по координати и брзини. Овој производ е еднаков на $\exp \left(-\frac{E}{k_B T} \right)$, каде E е вкупната енергија на молекулата. Овој експонент се нарекува Болцманов фактор, и ја определува веројатноста на молекулата да има енергија E во генерализираниот фазен простор на просторни координати и брзини.

Од оваа генерализирана функција на распределба по енергии, може да се докаже законот за еднаква распределба на енергијата по степени на слобода. Бидејќи во фазниот простор нема разлика помеѓу генерализираните координати (овие може да бидат и агли, должини, и други величини кои еднозначно ја определуваат положбата на системот) и генерализираните импулси (брзини), секој квадратен член во однос на координата од фазниот простор кој е вклучен во вкупната енергија придонесува идентично кон средната енергија со $\frac{k_B T}{2}$.

Болцмановиот фактор е исклучително важен бидејќи ја определува веројатноста на дадена состојба како функција само од вкупната енергија на молекулата, без директна вклученост на просторните или

брзинските координати. Поради ова, овој фактор е од суштинска важност во статистичката механика на квантни системи каде енергетските спектри ги определуваат својствата, додека мерењата на координатите и брзините се меѓусебно ограничени со принципите на неопределеност на Хајзенберг.

Болцмановата распределба по просторни координати ја изведовме во случај на гравитациско поле. Ќе покажеме дека формулата е применлива и за секоја друга конзервативна сила. Разгледуваме две паралелни рамнини од идеалниот гас на меѓусебно растојание Δx . Ќе претпоставиме дека надворешната конзервативна сила има компонента само долж x -оската за поедноставна математичка формулација на изведувањето на формулата. Бидејќи на овој елемент на идеалниот гас дејствува сила F на секоја молекула, за да постои рамнотежа, оваа сила е компензирана од разликата во притисок помеѓу двете рамнини:

$$\Delta N F = \Delta p \frac{\Delta V}{\Delta x} = \Delta p \frac{\Delta N}{n \Delta x},$$

каде ΔV е волументот на елементот на идеалниот гас, и ΔN е бројот на молекули во тој елемент. Ова равенство може да го трансформираме во

$$F \Delta x = \frac{\Delta p}{n}.$$

Членот $-F \Delta x$ е еднаков на промената на потенцијалната енергија ΔU при поместување за Δx , додека членот на десната страна може да го трансформираме со користење на равенката на идеален гас. Во диференцијална форма, добиваме

$$-dU = \frac{dn k_B T}{n}.$$

Решение на оваа диференцијална равенка е

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{U}{k_B T}\right).$$

Овој израз е идентичен со изразот кој го добивме во гравитациско поле. Според тоа, ова изведување покажува дека веројатноста за наоѓање на молекула на идеалниот гас е директно определена од Болцмановиот фактор, т.е., од потенцијалната енергија во позицијата од интерес.

9.4 Должината на среден слободен пат

Во моделот на идеален гас, молекулите се сметаат како точкести маси. Во овој апроксимативен модел, две молекули на гасот никогаш нема да се судрат помеѓу себе. Ваквата апроксимација не е соодветна кога треба да се пресмета должината на патот што го поминува дадена молекула пред да се судри со други. Во реален гас, молекулите се судираат помеѓу себе поради нивните димензии. Ако молекулите ги разгледаме апроксимативно како сфери со радиус r , две молекули ќе се судрат кога нивните центри ќе бидат на растојание помало од $2r$.

Според тоа, напречниот пресек на расејување на молекула на гасот е

$$\sigma = \pi(2r)^2 = 4\pi r^2.$$

При движење, молекулата во мал временски интервал dt поминува пат vdt . Во референтниот систем поврзан со молекулата, другите молекули се движат со релативни брзини во однос на молекулата од интерес. Според тоа, ако напречниот пресек го помножиме со патот на молекулата која би го поминала кога се движи со релативната брзина, и ако овој волумен го помножиме со концентрацијата, го добиваме бројот на молекули со кои би се судрила молекулата од интерес (статистички), $n\sigma v dt$. Според тоа, фреквенцијата на судири, т.е., бројот на судири во единица време, е $n\sigma v$.

Бидејќи во време dt , молекулата поминува пат vdt и се судира $n\sigma vdt$ пати, должината на средниот слободен пат, т.е., средното растојание помеѓу два судири, е

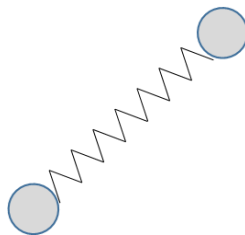
$$l = \frac{vdt}{n\sigma vdt} = \frac{1}{\sqrt{2}n\sigma},$$

каде заменивме дека односот помеѓу релативната брзина и апсолутната брзина е $\sqrt{2}$. Оваа вредност е изведена во претходниот пример за корените на средно-квадратните брзини. За идеален гас, бидејќи $\frac{\sqrt{\langle v^2 \rangle}}{\langle v \rangle} = \sqrt{\frac{3\pi}{8}} \approx 1.08$, средната вредност на брзината е релативно добра апроксимација за коренот на средно-квадратната брзина, и обратно.

Како пример, за гас на хелиум под стандардни услови, должината на среден слободен пат е приближно $0.24 \mu\text{m}$, коренот на средно-квадратната брзина е приближно 1.3 km/s , и фреквенцијата на меѓу-молекуларни судири е приближно 5.3 милијарди пати во 1 s .

9.5 Молекули со повеќе степени на слобода

Покрај наједноставниот случај на моноатомен гас, молекулите на голем број на супстанции се составени од повеќе атоми, т.е., имаат повеќе степени на слобода. Двоатомна молекула е илустрирана во **Фигура 9.4**.



Фигура 9.4. Илустрација на двоатомна молекула.

Центарот на маса на оваа двоатомна молекула има три трансляторни степени на слобода. Покрај нив, молекулата може да ротира околу центарот на маса. Такви ротации се опишуваат преку две генерализирани координати (агли). Дополнително, атомите може да вибрираат долж линијата која ги поврзува.

Покажавме дека трите трансляторни степени на слобода придонесуваат идентично кон вкупната енергија, како и сите други “активни” квадратни членови (во однос на генерализирана координата или генерализиран импулс) во изразот за енергијата.

Според тоа, средната енергија на двоатомната молекула е

$$\langle \varepsilon \rangle = (3 + 2 + 2) \frac{k_B T}{2}.$$

Првите три степени на слобода се трансляторните на центарот на маса, два степени на слобода припаѓаат на ротационото движење, додека последните два степени на слобода во формулата се генерирани од вибрациите на атомите (бидејќи вибрациската енергија е збир на кинетичка и потенцијална енергија, секоја со квадратна зависност во однос на соодветната генерализирана координата/импулс во фазниот простор).

Според тоа, средната енергија на ваква двоатомна молекула е

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{7k_B T}{2}.$$

Овој резултат е добиен во рамките на класичната физика, и е валиден за релативно високи температури.

Во рамките на квантната механика, која е потребно да се примени за карактеризација на својствата на атомско ниво (на пример, за определување на вибрацискиот спектар), енергијата е квантувана величина, т.е., има дискретни вредности, за разлика од континуираните

класични вредности. Соодветна квантно-механичка анализа покажува дека постои основна енергија на хармониски осцилатор, и цел спектар на возбудени нивоа со повисоки енергии од основната. Ова подразбира дека потребна е некоја минимална енергија која треба да се предаде на осцилаторот за премин од основно во возбудено ниво.

Енергиите кои одговараат на ниски температури не се доволни за премин од основното на првото возбудено ниво. Според тоа, осцилаторот останува во основно ниво при транслаторното движење на молекулата се додека температурата не се зголеми до вредности доволни да се реализира преминот кон повисоко енергетско ниво. Ова значи дека осцилаторниот мод на молекулата е “смрзнат”, т.е., не е вклучен во размената на енергија помеѓу молекулата и околината. Во ваков случај, активни ќе бидат само транслаторните и ротациските степени на слобода. Според тоа, средната енергија при вакви пониски температури е

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{5k_B T}{2}.$$

На уште пониски температури, “смрзнуваат” и ротациските степени на слобода. Во ваков случај, средната енергија на еден молекул е

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{3k_B T}{2},$$

што е идентично на енергијата на моноатомна молекула.

Според ова, потребна е подетална квантно-механичка анализа за прецизна карактеризација на енергетскиот спектар на молекулата, што овозможува да се определи средната енергија на молекулот во зависност од температурата, а со тоа и макроскопски својства од интерес на идеалниот гас. Слични анализи се потребни и за определување на средната енергија на молекул со три или повеќе атоми. Со зголемување на бројот на атоми, се зголемува бројот на

степените на слобода, а со тоа и комплексноста на енергетскиот спектар на молекулата, што често бара детални нумерички пресметки за карактеризација на вакви молекуларни системи.

9.6 Специфични топлински капацитети на идеален гас при константен волумен и константен притисок

Равенката на идеален гас

$$pV = Nk_B T$$

е применлива за идеални гасови со различни броеви на степени на слобода. Согласно оваа равенка, притисокот не е директно зависен од бројот на степени на слобода на идеалниот гас. Средната енергија на идеалниот гас, по молекула или вкупната, е величина која е определена од бројот на степени на слобода i на молекулите на идеалниот гас:

$$E = \frac{iNk_B T}{2}.$$

Специфичниот топлински капацитет при константен волумен покажува колкава надворешна енергија (топлина) треба да се внесе во идеалниот гас на единица маса за неговата температура да се зголеми за 1 K при константен волумен. Специфичниот капацитет при константен притисок е дефиниран на аналоген начин.

Надворешната енергија или топлина која се предава на идеалниот гас може да се трансформира во внатрешна енергија на идеалниот гас и/или да се потроши на работа при промена на волуменот на идеалниот гас.

Изразот за работа на идеалниот гас ќе го добиеме на следниов начин. Разгледуваме граница на идеалниот гас во форма на рамнина. При поместување на оваа рамнина за Δx , извршена е работа $F\Delta x = pA\Delta x =$

$p\Delta V$, каде ΔV е промената на волуменот при ова поместување. Со преминување во диференцијална форма, следи дека оваа формула е применлива за било каква форма на границите со кои е ограничен идеалниот гас.

Според тоа, распределбата на предадената надворешна енергија ΔQ може да ја запишеме како

$$\Delta Q = \Delta E + p\Delta V,$$

каде ΔE е промената на внатрешната енергија на идеалниот гас при оваа размена на енергија со околината.

Ако процесот се врши при константен волумен, за специфичниот топлински капацитет при константен волумен добиваме

$$c_V = \left(\frac{\delta Q}{m_V dT} \right)_V = \frac{dE}{m_V dT} = \frac{d}{m_V dT} \frac{iNk_B T}{2} = \frac{ik_B}{2m} = \frac{iR}{2M},$$

каде m_V е вкупната маса на идеалниот гас, и M е моларната маса.

Во случај на константен притисок, за специфичниот топлински капацитет добиваме

$$\begin{aligned} c_p &= \left(\frac{\delta Q}{m_V dT} \right)_p = \frac{dE}{m_V dT} + \frac{p}{m_V} \frac{dV}{dT} = \frac{iNk_B}{2m_V} + \frac{p}{m_V} \frac{d}{dT} \frac{Nk_B T}{p} = \frac{iR}{2M} + \frac{R}{M} \\ &= \frac{R}{M} \left(1 + \frac{i}{2} \right). \end{aligned}$$

Ако ги поделиме овие два топлински капацитети, добиваме

$$\frac{c_p}{c_V} = \frac{\left(1 + \frac{i}{2} \right)}{\frac{i}{2}} = \frac{i + 2}{i}.$$

Ова равенство покажува дека односот помеѓу топлинските капацитети може да се искористи да се определи бројот на степени на слобода на идеалниот гас. Овој однос може релативно едноставно да се измери,

што овозможува да се добие подобра слика за атомската структура на молекулите на идеалниот гас од интерес.

9.7 Адијабатски процес

Процесот на промена на состојбата на идеален гас без размена на енергија со околината ($\Delta Q = 0$) се нарекува адијабатски. За ваков процес, може да запишеме

$$dE + pdV = 0.$$

Промената на внатрешната енергија е определена со промената на температурата и топлински капацитет при константен волумен. Со замена, добиваме:

$$c_V m_V dT + pdV = 0.$$

Со диференцирање на равенката за идеален гас, добиваме

$$pdV + Vdp = Nk_B dT.$$

Со замена во претходниот израз, добиваме

$$c_V m_V \frac{pdV + Vdp}{Nk_B} + pdV = 0,$$

$$\frac{c_V MVdp}{R} + pdV \left(\frac{c_V M}{R} + 1 \right) = 0,$$

$$\frac{c_V MVdp}{R} + \frac{MpdV}{R} c_p = 0,$$

$$\frac{c_V dp}{p} = - \frac{c_p dV}{V}.$$

Со интегрирање, добиваме

$$\ln p = - \frac{c_p}{c_V} \ln V + const.,$$

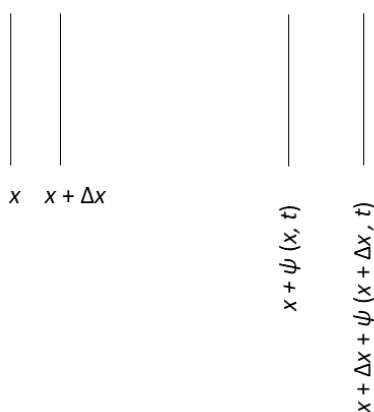
$$pV^\gamma = \text{const.}$$

каде $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ се нарекува адијабатски експонент. Оваа равенка ги поврзува притисокот и волуменот на идеалниот гас при адијабатска промена на состојбата.

9.8 Бранови во идеален гас

Идеалниот гас може да го разгледуваме како континуирана материја со локална густина која варира со позицијата. При промена на густината на дадена локација во споредба со рамнотежната средна вредност, поради движењето на молекулите во тој елемент, т.е., нивната дифузија во околината, оваа промена ќе се шири во околината. Доколку процесот е периодичен, во идеалниот гас ќе се формира браново движење.

Звукот кој се шири во воздушната атмосфера е всушност бран на компресија/експанзија, т.е., локална периодична промена на густината на воздухот. Ќе ја изведеме равенката со која може да се опише брановиот процес во идеален гас. Задачата ќе ја разгледаме во една димензија, и решението ќе го генерализираме во три димензии.



Фигура 9.5. Промена на димензиите на елемент од идеалниот гас при ширење на бран.

Во **Фигура 9.5** е прикажан елемент од интерес во рамнотежна положба (лево) и во даден момент при ширење на бранот (десно). Во овој момент, елементот има различна должина од рамнотежната поради компресијата/експанзијата во текот на брановото движење. Бидејќи се работи за истиот елемент со непроменлива маса, може да запишеме

$$\rho_0 A \Delta x = \rho A \left(\Delta x + \frac{\partial \psi}{\partial x} \Delta x \right),$$

каде $\psi(x, t)$ е поместувањето на инфинитезимален елемент во однос на неговата рамнотежна координата x , и ρ_0 е густината во рамнотежната положба. Ако густината ја запишеме преку нејзината промена во однос на рамнотежната густина, добиваме

$$\rho_0 A \Delta x = (\rho_0 + \Delta \rho) A \left(\Delta x + \frac{\partial \psi}{\partial x} \Delta x \right),$$

$$\rho_0 = (\rho_0 + \Delta \rho) \left(1 + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right),$$

$$\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial x} + \Delta \rho + \Delta \rho \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0.$$

Бидејќи изразот $\Delta \rho \frac{\partial \psi}{\partial x}$ е многу помал од $\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial x}$, со апроксимирање, може да запишеме

$$\Delta \rho = -\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Поради брановиот процес, левата и десната страна на елементот се под различен притисок. Според тоа, на елементот дејствува вкупна сила $A p(x + \Delta x, t) - A p(x, t)$, каде A е површината на елементот.

$$\begin{array}{c|c} p(x, t) & p(x + dx, t) \\ \hline & dx \\ \hline \end{array}$$

Фигура 9.6. Ширење на бран во идеален гас.

Согласно вториот Њутнов закон, оваа сила резултира во забрзување на елементот:

$$A(p(x + \Delta x, t) - p(x, t)) = -m \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2}.$$

Оваа равенка може да ја трансформираме во

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho_0 \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2},$$

каде ρ_0 е густината на идеалниот гас во рамнотежна положба.

Слично на густината, и притисокот ќе го изразиме преку неговата промена во однос на рамнотежната положба. Со замена, равенката се трансформира во

$$\frac{\partial \Delta p}{\partial x} = -\rho_0 \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2}.$$

Разликата во притисок може да ја поврземе со разликата во густина:

$$\Delta p = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_0 \Delta \rho.$$

Со замена на изразот за промената на густината, добиваме

$$\Delta p = -\rho_0 \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_0 \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Со замена на овој израз во парцијалната диференцијална равенка, добиваме

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_0 \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2}.$$

Добивме равенка на бран кој се шири со брзина

$$c = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_0}.$$

Оваа равенка може едноставно да се генерализира во три димензии. Во тој случај, парцијалното диференцирање по просторната координата преминува во Лапласовиот оператор.

Процесот на ширење на бранот може да го сметаме за адијабатски процес бидејќи елементот од интерес доволно брзо се компресира/шири така што размената на енергија помеѓу молекулите во тој елемент и околината е занемарливо мала. При адијабатски процес, притисокот и волуменот на гасот се поврзани со равенката

$$pV^\gamma = \text{const.}$$

Бидејќи масата на гасот е константна во дадениот елемент, притисокот и густината се поврзани со равенката

$$p = \text{const } \rho^\gamma.$$

Според тоа,

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_0 = \gamma (\text{const } \rho^{\gamma-1})_0 = \frac{\gamma p_0}{\rho_0}.$$

За брзината добиваме

$$c = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}.$$

Адијабатскиот коефициент за воздухот под стандардни услови е $\gamma = 1.4$, т.е., воздухот се однесува како гас со пет степени на слобода на молекулите. Бидејќи двоатомните молекули на азот и кислород се доминантни во молекуларната структура на воздухот, вредноста на адијабатскиот коефициент покажува дека само трансляторните и ротациските степени на слобода се активни за овие молекули. Со

замена на вредноста за притисокот и густината под стандардни услови добиваме дека брзината на звукот во воздухот е приближно 343 m/s. Оваа вредност одлично се совпаѓа со измерената вредност на брзината на звукот под истите услови.

9.9 Брауново движење

Разгледуваме мала честичка поставена во флуид. На оваа честичка постојано удираат молекулите на флуидот. Поради случајниот карактер на процесот на судири на молекулите и малата честичка, т.е., поради отстапувањата од средните вредности, молекулите и предаваат различни импулси во различни насоки со текот на времето. Според тоа, честичката ќе се движи случајно долж насоки кои постојано се менуваат. Ваквото движење на малата честичка директно ја демонстрира атомската природа на гасовите/течностите во кои е поставена таква честичка.

Равенката на движење на честичката од интерес долж x -оската е

$$m \frac{d^2 \Delta x}{dt^2} = F - \mu \frac{d\Delta x}{dt},$$

каде m е масата на честичката, Δx е поместувањето од почетната положба, μ е коефициентот на триење помеѓу честичката и средината, и F е случајна сила како резултат на судирите помеѓу молекулите и честичката.

Поради карактерот на движењето, подеднаква е веројатноста честичката да биде на левата или десната страна од почетната положба. Според тоа, средната вредност на Δx по ансамбл од вакви честички во време t е нула. Равенката ќе ја трансформираме за да ја процениме средната вредност на $(\Delta x)^2$. Со множење со Δx и усреднување по ансамбл од вакви честички добиваме

$$m \langle \Delta x \frac{d^2 \Delta x}{dt^2} \rangle + \mu \langle \Delta x \frac{d \Delta x}{dt} \rangle = \langle F \Delta x \rangle.$$

Бидејќи стохастичната сила како резултат на судирите и Δx се меѓусебно независни величини, последниот член во равенството е нула. За првиот член, може да запишеме

$$\langle \Delta x \frac{d^2 \Delta x}{dt^2} \rangle = \frac{d}{dt} \langle \Delta x \frac{d \Delta x}{dt} \rangle - \langle \left(\frac{d \Delta x}{dt} \right)^2 \rangle.$$

Со замена во претходната равенка, добиваме

$$\frac{d}{dt} \langle \Delta x \frac{d \Delta x}{dt} \rangle - \langle \left(\frac{d \Delta x}{dt} \right)^2 \rangle = -\frac{\mu}{m} \langle \Delta x \frac{d \Delta x}{dt} \rangle.$$

Вториот член во равенката е средно-квадратната брзина,

$$\langle \left(\frac{d \Delta x}{dt} \right)^2 \rangle = \langle v_x^2 \rangle = \frac{k_B T}{m},$$

додека првиот член е нула бидејќи

$$\langle \Delta x \frac{d \Delta x}{dt} \rangle = \frac{1}{2} \langle \frac{d(\Delta x)^2}{dt} \rangle = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle (\Delta x)^2 \rangle.$$

Членот $\langle (\Delta x)^2 \rangle$ линеарно се зголемува со времето бидејќи

$$\langle (\Delta x)^2 \rangle = \sum_i \langle (\Delta x_i)^2 \rangle + \sum_{i,j} \langle (\Delta x_j)(\Delta x_j) \rangle,$$

каде Δx_i е поместувањето при i -от “чекор” од движењето. Поради независноста помеѓу Δx_i и Δx_j добиваме

$$\langle (\Delta x)^2 \rangle = \sum_i \langle (\Delta x_i)^2 \rangle = N L^2,$$

каде L^2 е средно-квадратната должина на секое од поместувањата, додека N е вкупниот број на “поместувања”. Бидејќи интервалот помеѓу соседните “импулсни поместувања” на Брауновата честичка е независен

од времето, бројот N а со тоа и $\langle(\Delta x)^2\rangle$ се линеарни функции од времето. Според тоа,

$$\frac{d}{dt} \langle \Delta x \frac{d\Delta x}{dt} \rangle = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \frac{d}{dt} \langle (\Delta x)^2 \rangle = \frac{d}{dt} const. = 0.$$

Со замена во равенката добиваме

$$\frac{k_B T}{\mu} = \langle \Delta x \frac{d\Delta x}{dt} \rangle,$$

$$\langle \frac{d(\Delta x)^2}{dt} \rangle = \frac{2k_B T}{\mu},$$

$$\langle (\Delta x)^2 \rangle = \frac{2k_B T}{\mu} t.$$

Во случајот на движење во трите димензии:

$$\langle (\Delta x)^2 \rangle = \langle (\Delta y)^2 \rangle = \langle (\Delta z)^2 \rangle = \frac{\langle (\Delta x)^2 \rangle + \langle (\Delta y)^2 \rangle + \langle (\Delta z)^2 \rangle}{3} = \frac{\langle (\Delta r)^2 \rangle}{3},$$

$$\langle (\Delta r)^2 \rangle = \frac{6k_B T}{\mu} t.$$

Согласно оваа равенка, средно-квадратното отстапување линеарно се зголемува со текот на времето. Овој процес кој едноставно може да се карактеризира преку средно-квадратното поместување е директна потврда за атомската теорија на материјата. За сферни честички, коефициентот на триење е определен со коефициентот на вискозност на медиумот и радиусот на честичката согласно формулата за Стоксовата сила. Според тоа, формулата за средно-квадратното поместување може да се искористи за пресметување на Болцмановата константна.

ЛИТЕРАТУРА

T.W.B. Kibble, F.H. Berkshire, Classical Mechanics, Imperial College Press (2004).

J.R. Taylor, Classical Mechanics, University Science Books (2005).

M. Spurio, The Fundamentals of Newtonian Mechanics, Springer (2023).

D. Kleppner, R.J. Kolenkow, An Introduction to Mechanics, Cambridge University Press (2010).

H. Goldstein, C. Poole, J. Safko, Classical Mechanics, Addison Wesley (2000).

Y.A. Çengel, J.M. Cimbala, Fluid Mechanics - Fundamentals and Applications, McGraw-Hill (2006).

J.H. Spurk, N. Aksel, Fluid Mechanics, Springer (2008).

G.C. King, Vibrations and Waves, Wiley (2009).

D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, Fundamentals of Physics, Wiley (2013).

M.W. McCall, Classical Mechanics - From Newton to Einstein: A Modern Introduction, John Wiley & Sons (2011).

R. Serway, J. Jewett, Physics for Scientists and Engineers, Cengage Learning (2013).

B.R. Munson, D.F. Young, T.H. Okiishi, W.W. Huebsch, Fundamentals of Fluid Mechanics, John Wiley & Sons (2009).

S.T. Thornton, A. Rex, Modern Physics For Scientists and Engineers, Cengage Learning (2013).

H. Young, R. Freedman, University Physics with Modern Physics, Pearson (2019).

H.A. Radi, J.O. Rasmussen, Principles of Physics For Scientists and Engineers, Springer (2013).

J.D. Mays, Introductory Physics, Classical Academic Press (2019).

J.D. Cutnell, K.W. Johnson, D. Young, S. Stadler, Introduction to Physics, John Wiley & Sons (2015).